МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Классический университетский учебник

В.В. ФЕДОРЧУК, В.В. ФИЛИППОВ

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ
ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Уважаемый читатель!

Вы открыли одну из книг, изданных в серии «Классический университетский учебник», посвященной 250-летию Московского университета. Серия включает более 150 учебников и учебных пособий, рекомендованных к изданию Учеными советами факультетов и Редакционным советом серии.

Московский университет всегда славился своими профессорами и преподавателями, воспитавшими не одно поколение студентов, впоследствии внесших заметный вклад в развитие нашей страны, составивших гордость отечественной и мировой науки, культуры и образования. Юбилей Московского университета — выдающееся событие в жизни всей нашей страны и мирового образовательного сообщества.

Высокий уровень образования в Московском университете в первую очередь обеспечивается высоким уровнем написанных выдающимися учеными и педагогами учебников и учебных пособий, в которых сочетаются как глубина, так и доступность излагаемого материала. В этих книгах собран бесценный опыт методики и методологии преподавания, который стал достоянием не только Московского университета, но и других университетов России и всего мира.

Издание серии «Классический университетский учебник» наглядно демонстрирует тот вклад, который внес Московский университет в классическое университетское образование в нашей стране.

Решение этой благородной задачи было бы невозможным без активной помощи со стороны издательств, принявших участие в издании книг серии «Классический университетский учебник». Мы расцениваем это как поддержку ими позиции, которую занимает Московский университет в вопросах образования и науки.

Ректор Московского университета
академик РАН, профессор

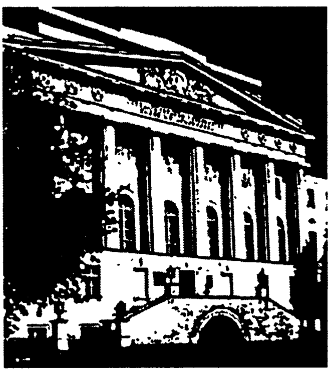
В. А. Садовничий

Серия

КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

основана в 2002 году по инициативе ректора
МГУ им. М.В. Ломоносова
академика РАН В.А. Садовничего
и посвящена

250-летию Московского университета



КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

В.В. ФЕДОРЧУК, В.В. ФИЛИППОВ

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Рекомендовано учебно-методическим Советом по математике и механике Учебно-методического объединения по классическому образованию в качестве учебного пособия для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 01.01.01 «Математика»

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2006

УДК 515.12
ББК 22.152
Ф33

Федорчук В. В., Филиппов В. В. **Общая топология. Основные конструкции:** Учеб. пособие. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 336 с. — ISBN 5-9221-0618-X.

В учебном пособии, представляющем собой изложение курса лекций, читаемых авторами на механико-математическом факультете МГУ, рассмотрены основные понятия теории топологических пространств: спектры, произведения и степени топологических пространств, пространства замкнутых и бикомпактных подмножеств, пространства отображений и др., и их приложения к другим областям математики.

Для студентов математических специальностей вузов.

Учебное издание

ФЕДОРЧУК Виталий Витальевич
ФИЛИППОВ Владимир Васильевич

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ. ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Оригинал-макет *М.С. Ярыкиной*
Оформление переплета *А.А. Логунова*

Подписано в печать 25.10.05. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 21. Уч.-изд. л. 21,0. Тираж 2000 экз. Заказ № 2483

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0618-X

9 785922 106184

ISBN 5-9221-0618-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Топология возникла в результате пересмотра с общей точки зрения ряда фундаментальных фактов геометрии и математического анализа. Но уже вскоре после возникновения топологии стало ясно, что в ее рамках можно не только обсуждать свойства объектов, возникших в других разделах математики, но, идя по пути, подсказанному приложениями, «конструировать» новые топологические объекты. Так вошли в топологию и в математику в целом такие понятия, как произведение топологических пространств, пространство отображений, пространство замкнутых подмножеств. Эта книга написана как учебник общей топологии, в котором изучение подобных конструкций стоит в центре изложения. При этом не ставилось целью поместить в относительно небольшую по объему книгу полное описание всех таких конструкций, их свойств и приложений, подразумевая достаточно конкретный круг читателей — студентов-математиков, которые специализируются как в общей топологии, так и в других областях математики, уже имеют некоторую начальную подготовку по топологии и могут при необходимости продолжить изучение топологии по другим источникам.

Книга содержит материал ряда спецкурсов, прочитанных на кафедре общей топологии и геометрии механико-математического факультета МГУ. Ее содержание можно разделить на три части. В первой части излагаются первоначальные понятия и факты общей топологии (глава I, часть главы II и отдельные куски других глав). Изложение материала в ней, хотя формально строгое, все-таки достаточно конспективно. Здесь приводится лишь минимум сведений из этой части топологии, необходимый для дальнейшего изложения.

Ядро книги — вторая часть (главы II–VI), в которой указываются способы построения по одним топологическим объектам других, новых объектов — «основные конструкции». К таким конструкциям относятся произведения топологических пространств и отображений, обратные спектры и их пределы, пространства отображений, пространства замкнутых множеств, пространства частичных отображений и т. д. Здесь также излагаются теоремы Э. Майкла о селекциях многозначных отображений, теоремы о зависимости от счетного числа координат функции, определенной на произведении пространств, спектральная теорема о гомеоморфизме.

Примеры применения основных конструкций и методов общей топологии к современным исследованиям составляет содержание третьей части книги, где прослеживаются три темы. Первая из них связана с последовательным изучением диадических бикомпактов, пространств Милютина, пространств Дугунджи, нуль-мягких отображений. Дальнейшее движение в этом направлении, выходящее уже за рамки этой книги, приводит к исследованию все более геометрических объектов: n-мягких отображений, абсолютных ретрактов и экстензоров, бесконечномерных многообразий. С исследованиями по этому направлению, проводимыми в нашей стране [1], можно познакомиться по работам А. Н. Дранишникова, М. М. Заричного, А. В. Иванова, В. В. Федорчука, А. Ч. Чигогидзе, Е. В. Щепина. Из зарубежных авторов в первую очередь следует отметить Х. Торунчика (Польша) и его учеников, Дж. Вэста, Т. Чепмэна, Р. Эдвардса и членов возглавляемой ими большой американской школы геометрической топологии.

Вторая тема связана с ковариантными функторами в категории бикомпактов. Эта проблематика в настоящее время интенсивно разрабатывается в направлении исследования геометрических свойств конкретных функторов и в направлении изучения классов абстрактных функторов, выделяемых наложением тех или иных ограничений. Из российских топологов, занимающихся этой тематикой, кроме уже упомянутых выше, следует отметить В. Н. Басманова, а из зарубежных — Д. Кертиса (США). Для более детального ознакомления с этой проблематикой можно рекомендовать обзорные статьи [4, 5, 12–15, 26].

Третья тема развивается в главе IX, написанной по мотивам недавних работ В. В. Филиппова. В ней прежде всего вводится новый топологический объект — пространство частичных отображений, представляющих интерес в связи с тем, что на его основе возникает довольно естественным образом аксиоматический подход к значительной части теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Собственно изучению самого пространства частичных отображений посвящены только первые полтора параграфа главы I, а ее основная часть содержит изложение приложения этого понятия к теории обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом мы не покидаем пределов топологии: в нашем изложении дифференциальные уравнения упоминаются только для того, чтобы показать, что развиваемая теория имеет вполне конкретную основу, непосредственно связанную с уравнениями (вне пределов книги остается то, что мы тем самым распространяем топологическую часть теории обыкновенных дифференциальных уравнений

---

[1] Следует иметь в виду, что первое издание книги было опубликовано в 1988 г.

на многие типы уравнений с особенностями в правой части: возникают новые, но уже не полностью топологические методы проверки аксиом теории для пространств решений уравнений с особенностями.)

К настоящему времени этот подход получил дальнейшее развитие, покрывая тематику центральной части теории обыкновенных дифференциальных уравнений и тем самым распространяя общую теорию обыкновенных дифференциальных уравнений на широкие классы уравнений с разрывными и многозначными правыми частями. Глава IX этой книги до сих пор остается лучшим кратким введением в общетопологические основы нового подхода.

Без дополнительных пояснений пользуемся общепринятыми обозначениями теории множеств и некоторыми ее теоремами. Все необходимые сведения такого рода можно найти в книге П. С. Александрова «Введение в теорию множеств и общую топологию» [1]. В частности, предполагаем, что читатель знаком с такими понятиями и фактами наивной теории множеств, как частично упорядоченное множество, упорядоченные и вполне упорядоченные множества, порядковые и кардинальные числа, аксиома выбора, теорема Цермело, лемма Цорна, принцип трансфинитной индукции, равенство $\tau^2 = \tau$ для бесконечного кардинального числа τ. Кардинальные числа отождествляются с соответствующими начальными порядковыми числами и поэтому обозначаются тем же символом ω_α. Через $|A|$ обозначается мощность множества A. Как уже было сказано, в некоторых случаях наше обсуждение ряда понятий общей топологии конспективно. При необходимости для более полного знакомства с ними можно воспользоваться книгами [2, 3].

Ссылки внутри книги делаются следующим образом: «см. II.6.26» означает «смотри пункт 26 § 6 главы II», а «см. 1.12» означает «смотри пункт 12 § 1 этой же главы».

Некоторые доказательства, как правило сводящиеся к автоматической проверке выполнения соответствующих условий или являющиеся простой комбинацией ранее установленных фактов, оставлены читателю в качестве упражнений. Проведя эти доказательства полностью, читатель может убедиться в хорошем понимании предыдущего материала.

Глава I

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Топологические пространства и непрерывные отображения

1.1. Пусть X — множество и $\mathscr{T}$ — система его подмножеств, удовлетворяющая двум условиям:

а) пересечение всякой конечной подсистемы элементов $\mathscr{T}$ принадлежит $\mathscr{T}$;

б) объединение всякой подсистемы элементов $\mathscr{T}$ принадлежит $\mathscr{T}$.

Из а) вытекает, что $X \in \mathscr{T}$, поскольку X — пересечение пустой подсистемы системы $\mathscr{T}$. Аналогично из б) вытекает, что $\varnothing \in \mathscr{T}$.

Пара $(X, \mathscr{T})$ называется *топологическим пространством*, а семейство $\mathscr{T}$ — *топологией*. Для краткости символ топологии часто опускают и обозначают топологическое пространство $(X, \mathscr{T})$ одной буквой X. Из тех же соображений говорят «пространство» вместо «топологическое пространство». Элементы множества X называются *точками* топологического пространства X.

1.2. Элементы топологии $\mathscr{T}$ называются *открытыми* множествами пространства X, а дополнения к ним — *замкнутыми*.

Из а) и б) вытекают свойства:

а′) объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;

б′) пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто.

1.3. Семейство всех топологий на множестве X упорядочено отношением включения.

Выше было отмечено, что пустое множество и все пространство X всегда открыты. Поэтому пара $\{\varnothing, X\}$ содержится в любой топологии $\mathscr{T}$ на множестве X и, следовательно, является наименьшей (чаще говорят: слабейшей) на X топологией.

Семейство $\mathscr{P}(X)$ всех подмножеств множества X — также топология на X, очевидно, наибольшая (или сильнейшая). Эта топология называется *дискретной*. В дискретном пространстве всякое множество одновременно открыто и замкнуто.

Числовая прямая $\mathbb{R}$ — также топологическое пространство. Здесь множество открыто тогда и только тогда, когда оно со всякой точкой содержит и некоторую ее ε-окрестность.

1.4. Произвольное открытое множество, содержащее множество $A \subset X$, называется ***окрестностью*** множества A в пространстве X. Окрестности множества A обозначим OA (иногда обозначают UA). Из а) следует, что пересечение конечного числа окрестностей множества A является его окрестностью. Из б) следует, что множество A открыто тогда и только тогда, когда для всякой его точки x существует окрестность Ox, лежащая в A. Если точка $x \in X$ имеет окрестность, состоящую из одной точки, то эта точка называется *изолированной* в пространстве X. В дискретном пространстве (см. 1.3) все точки изолированы.

1.5. Пусть $(X, \mathscr{T})$ — пространство и $Y \subset X$. Семейство $\mathscr{T}|Y \equiv \{U \cap Y \colon U \in \mathscr{T}\}$, очевидно, удовлетворяет свойствам а) и б) топологии. Поэтому $(Y, \mathscr{T}|Y)$ — топологическое пространство. Оно называется ***подпространством*** пространства $(X, \mathscr{T})$. Если $A \subset X$, OA — окрестность множества A в X, то $Y \cap OA$ — окрестность множества $Y \cap A$ в Y.

1.6. Пусть A — подмножество пространства X. Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A, обозначается $[A]_X$ или просто $[A]$ и называется ***замыканием*** множества A. Объединение всех открытых множеств, содержащихся в A, обозначается $\langle A\rangle_X$ или просто $\langle A\rangle$ и называется ***внутренностью*** или ***открытым ядром*** множества A.

Из определений непосредственно вытекает, что $[A]$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее A, а $\langle A\rangle$ — наибольшее открытое множество, лежащее в A. Поэтому $[F] = F$ для замкнутого множества F, а $\langle U\rangle = U$ для открытого U. Отсюда, в частности, получаем

1.7. $[[A]] = [A]$, $\langle\langle A\rangle\rangle = \langle A\rangle$.

Отметим также эквивалентные друг другу равенства

1.8. $[M] = X \setminus \langle X \setminus M\rangle$, $X \setminus [M] = \langle X \setminus M\rangle, \langle M\rangle = X \setminus [X \setminus M]$.

Докажем первое из них. Ясно, что $M \subset X \setminus \langle X \setminus M\rangle$ и $X \setminus [M] \subset X \setminus M$. Поэтому $[M] \subset X \setminus \langle X \setminus M\rangle$, и в случае $[M] \neq X \setminus \langle X \setminus M\rangle$ множество $\langle X \setminus M\rangle$ не было бы наибольшим открытым множеством, лежащим в $X \setminus M$, поскольку оно было бы собственным подмножеством множества $X \setminus [M]$.

1.9. Если всякая окрестность Ox точки $x \in X$ пересекается с множеством $A \subset X$, то x называется ***точкой прикосновения*** множества A. Обозначим множество всех точек прикосновения множества A через $\mathrm{Cl}\, A$. Если существует окрестность Ox, лежащая в A, то x называется ***внутренней точкой*** множества A. Множество всех внутренних точек A обозначим $\mathrm{Int}\, A$. Ясно, что $\mathrm{Cl}\, A = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

1.10. Предложение. $\mathrm{Cl}\, A = [A]$, $\mathrm{Int}\, A = \langle A\rangle$.

Доказательство. Ясно, что $\mathrm{Int}\, A \subset A$. Пусть $x \in \mathrm{Int}\, A$. Существует окрестность Ox, лежащая в A. Тогда для произвольной точки $y \in Ox$ множество Ox — ее окрестность, лежащая в A, т. е. $y \in \mathrm{Int}\, A$. Поэтому множество $\mathrm{Int}\, A$ открыто согласно 1.4 и, значит, $\langle A\rangle \supset \mathrm{Int}\, A$. С другой стороны, множество $\langle A\rangle$ является лежащей в A окрестностью всякой своей точки, т. е. $\mathrm{Int}\, A \supset \langle A\rangle$. Равенство $\mathrm{Cl}\, A = [A]$ получается из только что доказанного равенства $\langle A\rangle = \mathrm{Int}\, A$ переходом к дополнениям и применением равенств 1.8 и 1.9. Предложение 1.10 доказано.

1.11. Отображение $f\colon X \to Y$ пространства X в пространство Y называется ***непрерывным в точке*** $x \in X$, если для всякой окрестности Oy точки $y = f(x)$ найдется такая окрестность Ox, что $f(Ox) \subset Oy$. Отображение $f\colon X \to Y$ называется ***непрерывным***, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Непосредственно проверяется, что каждое из следующих условий эквивалентно непрерывности отображения $f\colon X \to Y$:

а) прообраз $f^{-1}(U)$ всякого открытого в Y множества U открыт в X;

б) прообраз $f^{-1}(F)$ всякого замкнутого в Y множества F замкнут в X;

в) $f([A]) \subset [f(A)]$ для всякого множества $A \subset X$.

Непрерывное отображение $f\colon X \to \mathbb{R}$ в числовую прямую называется *непрерывной (вещественной) функцией.*

1.12. Предложение (теорема о сложной функции). *Если отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ непрерывны, то непрерывна и их композиция $g \circ f\colon X \to Z$.*

Непосредственно вытекает из условия а) из 1.11.

1.13. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, а Z — подпространство пространства X. Отображение f, рассматриваемое лишь на множестве Z, обозначается $f|Z$ и называется *ограничением* или *сужением* отображения f на Z.

Обозначим через $i_Z\colon Z \to X$ отображение вложения, т. е. отображение, ставящее в соответствие точке $z \in Z$ ее саму. Очевидно, что $f|Z = f \circ i_Z$. В то же время из определения подпространства (1.5) вытекает непрерывность вложения i_Z. Итак, мы доказали

1.14. Предложение. *Ограничение непрерывного отображения непрерывно.*

1.15. Предложение. *Пусть пространство X — конечная сумма своих замкнутых подмножеств $F_i, i = 1, \ldots, k$, и пусть $f\colon X \to Y$ — такое отображение, что $f|F_i$ непрерывно для каждого i. Тогда отображение f непрерывно.*

Доказательство. Пусть Φ — произвольное замкнутое подмножество Y. Тогда $f^{-1}(\Phi) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} (f|F_i)^{-1}(\Phi)$. В самом деле, включение $\supset$ очевидно. Пусть теперь $x \in f^{-1}(\Phi)$. Тогда x принадлежит некоторому F_i и, значит, $x \in (f|F_i)^{-1}(\Phi)$.

Из условия б) из 1.11 вытекает замкнутость множеств $(f|F_i)^{-1}(\Phi)$. Поэтому замкнуто и $f^{-1}(\Phi)$. Снова, применяя условие б) из 1.11, получаем непрерывность f. Предложение 1.15 доказано.

Из него следует, в частности, что максимум и минимум конечного числа непрерывных функций суть функции непрерывные.

1.16. Пусть $f\colon X \to Y$ — взаимно однозначное отображение пространства X на пространство Y. Пусть, кроме того, непрерывны отображение f и обратное ему отображение f^{-1}. Тогда f называется ***гомеоморфизмом***, а пространства X и Y — ***гомеоморфными.***

Поскольку топология изучает свойства пространств, сохраняющиеся при гомеоморфизмах, в дальнейшем, как правило, не различаем гомеоморфные пространства.

1.17. Семейство $\mathfrak{B}$ открытых подмножеств X называется (открытой) ***базой*** пространства X, если всякое открытое множество пространства X есть объединение некоторых элементов из $\mathfrak{B}$.

Эквивалентное определение базы состоит в том, что для всякой точки $x \in X$ и всякой ее окрестности Ox существует такой элемент $U \in \mathfrak{B}$, что $x \in U \subset Ox$.

1.18. Семейство $\mathfrak{B}$ открытых подмножеств X называется (открытой) ***предбазой*** пространства X, если всевозможные конечные пересечения элементов $\mathfrak{B}$ образуют базу X.

Ясно, что семейство $\mathfrak{B}$ является предбазой пространства X тогда и только тогда, когда для всякой точки $x \in X$ и всякой ее окрестности Ox существует такой конечный набор $\{U_1, \dots, U_k\} \subset \subset \mathfrak{B}$, что $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \subset Ox$.

1.19. Предложение. *Для непрерывности отображения $f\colon X \to Y$ достаточно, чтобы были открыты прообразы $f^{-1}(U)$ элементов U некоторой предбазы $\mathfrak{B}$ пространства Y.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $Of(x)$ — произвольная окрестность. Существуют такие элементы $U_1, \dots, U_k$ предбазы $\mathfrak{B}$, что $f(x) \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \subset Of(x)$. Множества $f^{-1}(U_i)$ открыты по условию. Полагая $Ox = \bigcap\limits_{i=1}^{k} f^{-1}(U_i)$, имеем $f(Ox) \subset Of(x)$. Предложение 1.19 доказано.

Из этого предложения непосредственно вытекает

1.20. Предложение. *Для того чтобы взаимно однозначное отображение $f\colon X \to Y$ было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы некоторая предбаза $\mathfrak{B}$ пространства X отображалась на предбазу пространства Y.*

1.21. Пусть $\mathfrak{B}$ — семейство подмножеств множества X, удовлетворяющее условиям:

а) всякая точка $x \in X$ принадлежит некоторому элементу $U \in \in \mathfrak{B}$;

б) если $x \in U_1 \cap U_2$ и $U_1, U_2 \in \mathfrak{B}$, то существует такой элемент $U_3 \in \mathfrak{B}$, что $x \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

Тогда $\mathfrak{B}$ является базой некоторой (однозначно определенной) топологии на множестве X. В самом деле, назовем открытыми всевозможные объединения элементов семейства $\mathfrak{B}$ и покажем, что это топология. Условие б) из 1.1 выполнено автоматически. Теперь покажем, что пересечение конечного семейства открытых множеств открыто. Если это семейство пусто, то его пересечение совпадает со всем множеством X, которое открыто согласно условию а). Возьмем непустое семейство $\{U_1, \ldots, U_k\}$ открытых множеств. Пусть $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_k$. По определению открытых множеств для каждого $i = 1, \ldots, k$ существует такой элемент $V_i \in \in \mathfrak{B}$, что $x \in V_i \subset U_i$. Применяя $k-1$ раз условие б), найдем такой элемент $V_x \in \mathfrak{B}$, что $x \in V_x \subset \bigcap\limits_{i=1}^{k} V_i$. Итак, всякая точка x лежит в пересечении $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$ вместе с некоторым содержащим ее элементом V_x семейства $\mathfrak{B}$, т. е. пересечение является объединением элементов V_x семейства $\mathfrak{B}$.

Таким образом, можем задавать топологию на множестве X посредством семейств $\mathfrak{B}$, удовлетворяющих условиям а) и б).

1.22. Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольное семейство подмножеств множества X, являющееся *покрытием* X, т. е. $\cup\mathfrak{B} = X$. Тогда $\mathfrak{B}$ является предбазой некоторой топологии на X, поскольку семейство конечных пересечений элементов $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условиям а) и б) из 1.21.

1.23. Пусть $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, — семейство отображений из множества X в пространства Y_α. Тогда семейство $\{f_\alpha^{-1}(U)\colon U$ открыто в $Y_\alpha\}$ согласно 1.22 — предбаза топологии $\mathcal{T}$ на X. Относительно этой топологии все отображения f_α непрерывны, причем $\mathcal{T}$ — наименьшая топология на X, обладающая этим свойством. Назовем $\mathcal{T}$ *слабой топологией относительно семейства* $\{f_\alpha\colon \alpha \in A\}$.

1.24. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение из пространства X на множество Y. Тогда семейство $\mathcal{T} = \{U \subset Y\colon f^{-1}(U)$ открыто$\}$ является топологией на множестве Y, очевидно, сильнейшей среди всех, для которых отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно. Назовем $\mathcal{T}$ *факторной топологией*, $(Y, \mathcal{T})$ — *фактор-пространством* пространства X, а f — *факторным отображением*.

Факторные отображения естественно возникают при так называемых факторизациях пространства X по некоторому его разбиению. Под *разбиением* пространства понимается дизъюнктная система $\mathfrak{M}$ его замкнутых непустых подмножеств, покрывающих X. Если определено разбиение $\mathfrak{M}$, то определено и естественное отображение $f\colon X \to \mathfrak{M}$, состоящее в том, что каждой точке $x \in X$ ставится в соответствие единственное содержащее x множество $M \in \mathfrak{M}$. Теперь множество $\mathfrak{M}$ превращается в фактор-пространство описанным выше способом.

§ 2. Аксиомы отделимости. Лемма Урысона. Теорема Брауэра–Титце–Урысона о продолжении функций

2.1. Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет *аксиоме отделимости Колмогорова* или является T_0-*пространством*, если для любых различных точек x и y пространства X по крайней мере одна из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.

2.2. Пространство X называется T_1-*пространством*, если для любых различных точек x и y пространства X существует окрестность Ox, не содержащая точки y, и окрестность Oy, не содержащая точки x.

Очевидно, X есть T_1-пространство тогда и только тогда, когда все одноточечные подмножества X замкнуты.

2.3. Пространство X называется *хаусдорфовым* или *T_2-пространством*, если для всякой пары различных точек из X существуют непересекающиеся их окрестности.

2.4. Пространство X называется *T_3-пространством*, если для всякой точки $x \in X$ и всякого не содержащего ее замкнутого множества F существуют непересекающиеся окрестности Ox и OF.

2.5. Аксиомы T_0, T_1, T_2 идут в порядке усиления и дают все более узкие классы пространств. Так, пространство на двухточечном множестве $\{a, b\}$, открытыми в котором являются множества $\varnothing$, $\{a\}$, $\{a, b\}$ (так называемое «связное двоеточие»), есть T_0-пространство, но не T_1-пространство.

Бесконечное множество, снабженное топологией, в которой замкнуты лишь конечные подмножества (минимальной T_1-топологией), является T_1-пространством, но не T_2-пространством.

В то же время аксиома T_3 не влечет даже T_0. Это показывает пример «слипшегося двоеточия» — двухточечного пространства с наименьшей топологией.

2.6. Пространство, одновременно удовлетворяющее аксиомам T_0 и T_3, называется *регулярным*. Всякое регулярное пространство X хаусдорфово. В самом деле, пусть $x, y \in X$ и $x \neq y$. Для одной из точек, допустим для x, существует окрестность Ox, не содержащая y. Взяв непересекающиеся окрестности точки x и замкнутого множества $X \setminus Ox$, тем самым заключим x и y в непересекающиеся окрестности.

Пример хаусдорфова нерегулярного пространства — числовая прямая, базу топологии которой дополняют всевозможные множества вида $U \setminus \{1/n\colon n = 1, 2, \ldots\}$, где U — интервал числовой прямой. Множество $\{1/n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ замкнуто в этом пространстве и неотделимо от нуля непересекающимися окрестностями.

2.7. Пространство X называется *T_4-пространством*, если любую дизъюнктную пару замкнутых в X множеств можно заключить в непересекающиеся окрестности. Легко проверить, что это условие эквивалентно следующему: для всякого замкнутого множества F и всякой его окрестности OF существует другая окрестность O_1F такая, что $[O_1F] \subset OF$.

Другое эквивалентное условие: любую дизъюнктную пару замкнутых множеств можно заключить в окрестности с непересекающимися замыканиями.

Пример «слипшегося двоеточия» показывает, что аксиома T_4 не влечет T_0. Числовая прямая, на которой открыты лишь бесконечные интервалы вида $(-\infty, a)$, показывает, что аксиома T_4 не влечет и T_3.

2.8. Пространство, одновременно удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_4, называется ***нормальным.***

Всякое нормальное пространство регулярно, поскольку из T_1 плюс T_4 вытекает T_3. В то же время, как показывает связное двоеточие, из T_0 плюс T_4 не вытекает T_3. Пример регулярного не нормального пространства дан ниже (см. II.3.4).

2.9. Если аксиомы T_0, T_1, T_2, T_3 и регулярность наследуются при переходе к подпространству, то для нормальности это уже не так (см. II.4.14). Но замкнутое подмножество нормального пространства нормально.

Пространство, всякое подпространство которого нормально, называется ***наследственно нормальным.***

2.10. Предложение. ***Если всякое открытое подмножество пространства X нормально, то X наследственно нормально.***

Доказательство. Пусть Y — подпространство пространства X и F_1, F_2 — непересекающиеся замкнутые подмножества Y. Множество $U = X \setminus [F_1]_X \cap [F_2]_X$ открыто в X, а $\Phi_i = [F_i]_X \setminus [F_1]_X \cap [F_2]_X$ замкнуто в U. Кроме того, Φ_1 и Φ_2 не пересекаются. Значит, по условию существуют открытые в U непересекающиеся множества $V_i \supset \Phi_i$. Но открытое подмножество открытого множества открыто во всем пространстве. Следовательно, множества V_i открыты в X. Множества $U_i = V_i \cap \cap Y, i = 1, 2$, открыты в Y и не пересекаются. Осталось показать, что $F_i \subset U_i$. Из $\Phi_i \subset V_i$ следует $\Phi_i \cap Y \subset U_i$. С другой стороны, $F_i \subset \Phi_i \cap Y$. В самом деле, из дизъюнктности и замкнутости F_i

в Y следует, что $Y \subset U$. Поэтому $F_i \subset \Phi_i$, а следовательно, $F_i = F_i \cap Y \subset \Phi_i \cap Y$. Предложение 2.10 доказано.

2.11. Нормализующая лемма. *Пусть $M_i \subset X$, O_j^i, $j = 1, 2, \ldots$, — открытые в X множества, $i = 1, 2$. Пусть, кроме того, $M_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} O_j^i$,*

$$M_1 \cap [O_j^2] = \varnothing,$$
$$M_2 \cap [O_j^1] = \varnothing.$$

Тогда множества M_1 и M_2 имеют непересекающиеся окрестности.

Доказательство. Положим $V_k^1 = O_k^1 \setminus \bigcup\limits_{j \leqslant k} [O_j^2]$, $V_k^2 = O_k^2 \setminus \bigcup\limits_{j \leqslant k} [O_j^1]$. При любых k_1, k_2 множества $V_{k_1}^1$ и $V_{k_2}^2$ не пересекаются. В самом деле, предположив, что $k_1 \leqslant k_2$, имеем

$$V_{k_2}^2 \subset X \setminus \bigcup_{j \leqslant k_2} [O_j^1] \subset X \setminus V_{k_1}^1.$$

Поэтому открытые множества $V^i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_k^i$, $i = 1, 2$, не пересекаются. Кроме того, $M_1 \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} O_j^1 \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} [O_j^2]у \subset V^1$. Аналогично, $M_2 \subset V^2$. Лемма доказана.

2.12. Подмножество топологического пространства, являющееся суммой счетного числа замкнутых множеств, называется *F_σ-множеством*. Счетные пересечения открытых множеств назовем *G_δ-множествами*.

2.13. Предложение. *Всякое F_σ-подмножество P нормального пространства X нормально.*

Доказательство. Пусть $P = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F_j$, а M_1 и M_2 — замкнутые в P непересекающиеся множества. По определению подпространства существуют такие замкнутые в X множества Φ_i, что $M_i = \Phi_i \cap P$. Тогда $F_j \cap \Phi_1 \cap \Phi_2 = \varnothing$. Поэтому согласно 2.7 существуют такие открытые множества $O_j^1 \supset \Phi_1 \cap F_j$ и $O_j^2 \supset \Phi_2 \cap F_j$, что $[O_j^1] \cap \Phi_2 = \varnothing$ и $[O_j^2] \cap \Phi_1 = \varnothing$. Тем более $[O_j^1] \cap M_2 = \varnothing$

и $[O_j^2] \cap M_1 = \varnothing$. Теперь, применяя нормализующую лемму, строим непересекающиеся окрестности множеств M_i. Предложение доказано.

2.14. Нормальное пространство X называется *совершенно нормальным*, если всякое открытое его подмножество есть F_σ-множество, или, что то же самое, всякое замкнутое его подмножество есть G_δ-множество.

Оправданием такого определения служит следующее вытекающее из предложений 2.10 и 2.13.

2.15. Предложение. *Всякое совершенно нормальное пространство наследственно нормально.*

Кроме того, само свойство совершенной нормальности наследуется при переходе к подпространству. Это вытекает из того, что если P есть F_σ-подмножество пространства X и $Y \subset X$, то $P \cap Y$ есть F_σ-подмножество пространства Y.

Совершенно нормальные пространства образуют собственный подкласс в классе наследственно нормальных пространств. Пример наследственно нормального не совершенно нормального пространства дан ниже (см. 4.14).

2.16. Скажем, что пространство X допускает плотное дробление между непересекающимися множествами F_0 и F_1, если существует семейство $\{\Gamma_r\}$ открытых в X множеств, индексированное числами r из всюду плотного на отрезке $[0; 1]$ множества D, такое, что

$$F_0 \subset \Gamma_r \subset [\Gamma_r] \subset \Gamma_{r'} \subset X \setminus F_1$$

для любых $r, r' \in D$ при условии $r < r'$.

2.17. Предложение. *Если пространство X допускает плотное дробление между множествами F_0 и F_1, то существует такая непрерывная функция $\varphi\colon X \to [0; 1]$, что $\varphi(F_0) = 0$ и $\varphi(F_1) = 1$.*

Доказательство. Произвольная точка $x \in X$ определяет сечение (A_x, B_x) во множестве D:

$$A_x = \{r\colon x \notin \Gamma_r\}, \quad B_x = \{r\colon x \in \Gamma_r\}.$$

Следовательно, существует единственное действительное число $\varphi(x) = \sup A_x = \inf B_x$. Итак, построена функция $\varphi\colon X \to [0; 1]$.

Ясно, что $\varphi(F_0) = 0$ и $\varphi(F_1) = 1$. Остается проверить непрерывность φ. Поскольку полуинтервалы $[0; a)$ и $(b; 1]$ образуют предбазу на отрезке $[0; 1]$, то согласно 1.19 достаточно показать открытость множеств $\varphi^{-1}([0; a))$ и $\varphi^{-1}((b; 1])$. Она вытекает из равенств

$$\varphi^{-1}([0; a)) = \cup\{\Gamma_r : r < a\}$$

и

$$\varphi^{-1}((b; 1]) = \cup\{X \setminus [\Gamma_r] : r > b\}.$$

Проверим первое из них. Если $x \in \Gamma_r$, то $r \in B_x$ и $\varphi(x) \leqslant r$. Следовательно, $\cup\{\Gamma_r : r < a\} \subset \varphi^{-1}([0; a))$. Пусть теперь $\varphi(x) = t < a$. Значит, $t = \inf B_x$. Взяв число $r' \in D$ между t и a, имеем $x \in \Gamma_{r'} \subset \cup\{\Gamma_r : r < a\}$.

Теперь второе равенство. Если $x \notin [\Gamma_r]$, то $r \in A_x$ и $\varphi(x) \geqslant r$. Следовательно, $\cup\{X \setminus [\Gamma_r] : r > b\} \subset \varphi^{-1}((b; 1])$. Пусть теперь $\varphi(x) = t > b$. Значит, $t = \sup A_x$ и $x \notin \Gamma_r$ при $r \leqslant t$. Возьмем числа $r', r'' \in D$ так, чтобы $b < r' < r'' < t$. Тогда $x \notin \Gamma_{r''}$ и, следовательно, $x \in X \setminus [\Gamma_{r'}] \subset \cup\{X \setminus [\Gamma_r] : r > b\}$. Предложение доказано.

2.18. Лемма Урысона. *Для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств F_0 и F_1 нормального пространства X существует такая непрерывная на X функция φ, что $\varphi(F_0) = 0$, $\varphi(F_1) = 1$ и $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Согласно предложению 2.17 достаточно показать, что X допускает плотное дробление между F_0 и F_1. В качестве D возьмем множество двоично-рациональных чисел отрезка $[0; 1]$. Положим $\Gamma_1 = X \setminus F_1$. Согласно 2.7 существует такая окрестность Γ_0 множества F_0, что $[\Gamma_0] \subset \Gamma_1$. Таким образом, по индукции строится последовательность открытых множеств Γ_r, $r \in D$, удовлетворяющая условиям определения 2.16. Лемма Урысона доказана.

2.19. Замечание. Ясно, что вместо отрезка $[0; 1]$ в формулировке леммы Урысона можно взять произвольный отрезок $[a; b]$ числовой прямой.

2.20. Предложение. *Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных на топологическом пространстве функций — непрерывная функция.*

Это утверждение носит чисто топологический характер и даваемое ему в математическом анализе доказательство дословно переносится на топологические пространства.

2.21. Теорема Брауэра–Титце–Урысона о продолжении непрерывных функций. *Пусть Φ — замкнутое подмножество нормального пространства X и $\varphi\colon \Phi \to \mathbb{R}$ — непрерывная ограниченная функция. Тогда существует такая непрерывная функция $\psi\colon X \to \mathbb{R}$, что $\psi|\Phi = \varphi$ и $\sup|\psi| = \sup|\varphi|$.*

Доказательство. Положим $\varphi_0 = \varphi$. Пусть $\mu = \mu_0 > 0$ — точная верхняя грань функции $|\varphi_0|$ (если $\mu_0 = 0$, то полагаем $\psi \equiv 0$). Положим $P_0 = \{x \in \Phi\colon \varphi_0(x) \leqslant -\mu_0/3\}$, $Q_0 = \{x \in \Phi\colon \varphi_0(x) \geqslant \mu_0/3\}$. Множества P_0 и Q_0 замкнуты и не пересекаются. По лемме Урысона существует такая непрерывная на X функция ψ_0, что $\psi_0(P_0) = -\mu_0/3$, $\psi_0(Q_0) = \mu_0/3$ и $|\psi_0(x)| \leqslant \mu_0/3$. Положим $\varphi_1 = \varphi_0 - \psi_0\colon \Phi \to \mathbb{R}$. Функция φ_1 непрерывна и $\sup|\varphi_1| \equiv \mu_1 \leqslant 2\mu_0/3$.

Теперь полагаем $P_1 = \{x \in \Phi\colon \varphi_1(x) \leqslant -\mu_1/3\}$, $Q_1 = \{x \in \Phi\colon \varphi_1(x) \geqslant \mu_2/3\}$. Строим непрерывную функцию $\psi_1\colon X \to \mathbb{R}$ так, что $\psi_1(P_1) = -\mu_1/3, \psi_1(Q_1) = \mu_1/3$ и $|\psi_1(x)| \leqslant \mu_1/3$. Полагаем $\varphi_2 = \varphi_1 - \psi_1$ и т. д.

Получаем последовательность $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ непрерывных функций на Φ и последовательность $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ непрерывных функций на X такие, что $\varphi_{n+1} = \varphi_n - \psi_n$, $|\psi_n| \leqslant \mu_n/3$, $\sup|\varphi_{n+1}| \equiv \mu_{n+1} \leqslant 2\mu_n/3$. Следовательно, $|\varphi_n| \leqslant (2/3)^n\mu_0$, $|\psi_n| \leqslant (2/3)^n\mu_0/3$. Положим $s_n = \psi_0 + \ldots + \psi_n$. Последовательность непрерывных на X функций s_n является равномерно сходящейся. В самом деле, при $m > n$ имеем

$$|s_m - s_n| = |\psi_{n+1} + \ldots + \psi_m| \leqslant |\psi_{n+1}| + \ldots + |\psi_m| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{\mu_0}{3} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{\mu_0}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \frac{\mu_0}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \mu_0.$$

Согласно 2.18 последовательность s_n сходится к непрерывной функции $\psi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \psi_n$. Имеем $|\psi| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\mu_0}{3} = \mu_0$. Далее $\varphi - s_n = \varphi_0 - \psi_0 - \psi_1 - \ldots - \psi_n = \varphi_1 - \psi_1 - \ldots - \psi_n = \varphi_n - \psi_n = \varphi_{n+1}$. Значит, $|\varphi - s_n| \leqslant (2/3)^{n+1}\mu_0$. Поэтому $\psi|\Phi = \varphi$. Теорема доказана.

2.22. Теорема 2.21 верна и для неограниченных функций. В самом деле, случай неограниченной функции φ сводится к случаю функции $\varphi\colon \Phi \to (-1;1)$. Согласно 2.21 она продолжается до непрерывной функции $\psi_1\colon X \to [-1;1]$. Положим $F_0 = \psi_1^{-1}(\{-1,1\})$. По лемме Урысона существует такая функция $\psi_0\colon X \to [0;1]$, что $\psi_0(F_0) = 0$ и $\psi_0(\Phi) = 1$. Тогда функция ψ, равная произведению функций ψ_1 и ψ_0, и будет искомым продолжением функции φ.

§ 3. Метрические пространства. Полные и топологически полные пространства. Некоторые стандартные метрические пространства

3.1. *Метрическим пространством* называется пара (X,ρ), где X — множество, а ρ — *метрика* на X, т. е. такая неотрицательная функция на произведении $X \times X$, что соблюдаются следующие условия:

а) $\forall x,y \in X \quad \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);

б) $\forall x,y \in X \quad \rho(x,y) = \rho(y,x)$ (аксиома симметрии);

в) $\forall x,y,z \in X \quad \rho(x,y) + \rho(y,z) \geqslant \rho(x,z)$ (аксиома треугольника).

Часто для краткости метрическое пространство обозначают одной буквой X. Элементы метрического пространства называются *точками*.

3.2. Если (X,ρ) — метрическое пространство и $Y \subset X$, то пара $(Y, \rho|Y \times Y)$ также является метрическим пространством, называемым *подпространством* пространства X.

3.3. Если верхняя грань множества всех чисел $\rho(x,y)$, когда x, y пробегают все точки подмножества M пространства

X, есть конечное число d, то множество M называется *ограниченным*, а число d называется его *диаметром* и обозначается $\operatorname{diam} M$.

3.4. *Расстоянием между двумя множествами* M и N в метрическом пространстве называется неотрицательное число $\rho(M,N) = \inf \rho(x,y)$, где x и y — произвольные точки соответственно из M и N.

3.5. Если $x \in X$, а ε — положительное число, то множество всех точек y, для которых $\rho(x,y) < \varepsilon$, называется *ε-окрестностью точки* x и обозначается через $O(x,\varepsilon)$. Аналогично определяется *ε-окрестность $O(M,\varepsilon)$ множества $M \subset X$* как множество всех таких точек $x \in X$, что $\rho(x,M) < \varepsilon$. Легко видеть, что $O(M,\varepsilon) = \bigcup\limits_{x \in M} O(x,\varepsilon)$.

3.6. Предложение. *Всевозможные ε-окрестности точек $x \in X$ образуют базу топологии на X, называемой метрической топологией пространства X.*

Доказательство. Условие а) из 1.21 выполнено очевидным образом. Проверим условие б). Пусть $x \in O(x_1,\varepsilon_1) \cap \cap O(x_2,\varepsilon_2)$. Положим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - \rho(x,x_1), \varepsilon_2 - \rho(x,x_2)\}$. Число ε больше нуля. Покажем, что $O(x,\varepsilon) \subset O(x_1,\varepsilon_1) \cap O(x_2,\varepsilon_2)$. Возьмем произвольную точку $y \in O(x,\varepsilon)$. Тогда на основании аксиомы треугольника

$$\rho(y,x_i) \leqslant \rho(y,x) + \rho(x,x_i) < \varepsilon + \rho(x,x_i) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon_i - \rho(x,x_i) + \rho(x,x_i) = \varepsilon_i,$$

т. е. $y \in O(x_i,\varepsilon_i)$. Предложение доказано.

3.7. Итак, в метрическом пространстве X множество U открыто тогда и только тогда, когда оно со всякой своей точкой содержит и некоторую ее ε-окрестность. Точка x есть точка прикосновения множества M тогда и только тогда, когда всякая ε-окрестность точки x пересекается с M, т. е. когда $\rho(x,M) = 0$. Другими словами,

$$[M] = \{x \in X \colon \rho(x,M) = 0\}.$$

3.8. Если (X,ρ) — метрическое пространство и $Y \subset X$, то на множестве Y можно рассмотреть две топологии. Во-первых, метрическую топологию пространства $(Y, \rho|Y \times Y)$, а во-вторых, топологию подпространства пространства (X, ρ) с метрической топологией. Легко убедиться в том, что эти топологии совпадают.

3.9. *Гильбертово произведение метрических пространств.* Пусть (X_α, ρ_α), $\alpha \in A$, — некоторое семейство метрических пространств, и пусть в каждом пространстве X_α выделена точка x_α^0. Положим $x_0 = (x_\alpha^0) \in \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ и в произведении $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ выделим подмножество

$$\prod_{\alpha \in A} {}^{x_0}X_\alpha = \Big\{ x = (x_\alpha) \colon \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha^2(x_\alpha, x_\alpha^0) < \infty \Big\}.$$

Из этого определения вытекает, что точки $x \in \prod\limits_{\alpha \in A} {}^{x_0}X_\alpha$ и x_0 различаются на не более чем счетном множестве координат.

Для дальнейшего нам потребуется неравенство Коши–Буняковского

$$(\bar{a}, \bar{b}) \leqslant |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \tag{1}$$

для векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ арифметического n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$. Для доказательства (1) заметим сначала, что оно эквивалентно неравенству

$$(\bar{a}, \bar{b}) \leqslant 1 \tag{2}$$

для единичных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Переходя к координатной форме, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k \leqslant 1 \tag{3}$$

для $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k^2 = 1$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k^2 = 1$. Проверим неравенство (3). Имеем

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (u_k - v_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \sum_{k=1}^{n} v_k^2 = 1 - 2\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \\ = 2 - 2\sum_{k=1}^{n} u_k v_k,$$

т. е. $1 - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k v_k \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Теперь перепишем неравенство (1) в координатной форме

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}. \tag{4}$$

Умножая это неравенство на 2 и прибавляя к обеим его частям выражение $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} v_k^2$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k+v_k)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}\right)^2, \tag{5}$$

или, извлекая корень,

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(u_k+v_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}. \tag{6}$$

Пусть теперь последовательности действительных чисел

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \quad \text{и} \quad v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$$

суть последовательности со сходящейся суммой квадратов. Тогда, переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (6), получаем

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(u_k+v_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} v_k^2}. \tag{7}$$

Возвращаясь к множеству $\prod\limits_{\alpha\in A}{}^{x_0}X_\alpha$, для любых двух его элементов x и y положим

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{\alpha\in A}\rho_\alpha^2(x_\alpha,y_\alpha)}. \tag{8}$$

В силу неравенства треугольника $\rho_\alpha(x_\alpha,y_\alpha) \leqslant \rho_\alpha(x_\alpha,x_\alpha^0) + {}$ $+ \rho_\alpha(x_\alpha^0,y_\alpha)$ в подкоренном выражении лишь счетное число слагаемых $\rho_{\alpha_n}^2(x_{\alpha_n},y_{\alpha_n})$ отличны от нуля. Кроме того, $\sqrt{\sum\limits_{\alpha\in A}\rho_\alpha^2(x_\alpha,y_\alpha)} < \infty$ согласно неравенству (7) при $u_n = {}$ $= \rho_{\alpha_n}(x_{\alpha_n},x_{\alpha_n}^0)$ и $v_n = \rho_{\alpha_n}(x_{\alpha_n}^0,y_{\alpha_n})$.

Итак, расстояние $\rho(x, y)$ определено и удовлетворяет аксиомам тождества и симметрии. Проверим теперь аксиому треугольника. Имеем

$$\rho(x, z) = \sqrt{\sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha^2(x_\alpha, z_\alpha)} \leqslant \sqrt{\sum_{\alpha\in A} [\rho_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) + \rho_\alpha(y_\alpha, z_\alpha)]^2},$$

что согласно (7) не превосходит

$$\sqrt{\sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha^2(x_\alpha, y_\alpha)} + \sqrt{\sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha^2(y_\alpha, z_\alpha)} = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Таким образом, множество $\prod\limits_{\alpha\in A} {}^{x_0}X_\alpha$ с определенной равенством (8) метрикой есть метрическое пространство, которое и называется *гильбертовым произведением пространств X_α над точкой $x_0 = (x_\alpha^0)$*.

3.10. Легко убедиться в том, что *n-мерное эвклидово пространство $\mathbb{R}^n$* с метрикой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

— гильбертово произведение n экземпляров числовой прямой $\mathbb{R}$ над точкой 0.

3.11. Другими примерами гильбертовых произведений являются: *гильбертово пространство H^ω* — гильбертово произведение счетного числа прямых $\mathbb{R}$ над точкой 0 и *обобщенное гильбертово пространство H^τ веса τ — гильбертово* произведение τ штук числовых прямых, где τ — несчетное кардинальное число.

3.12. *Метрическое произведение последовательности пространств (X_i, ρ_i) ограниченного диаметра* — это гильбертово произведение пространств $(X_i, \rho_i/2^i)$ над произвольной точкой $x \in \prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. Обозначается оно $\prod\limits_{i=1}^{\infty} {}^M X_i$. Имеется в виду, что диаметры пространств X_i ограничены сверху некоторой константой d. Поэтому множество $\prod\limits_{i=1}^{\infty} {}^M X_i$ совпадает со всем произведением, и, следовательно, определение метрического произведения не зависит от выбора точки x.

3.13. *Бэровское пространство.* Пусть $A = \{\alpha\}$ — произвольное множество бесконечной мощности τ. На счетной степени A^ω множества A определим метрическое пространство B_τ следующим образом. Точками пространства B_τ являются последовательности $\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$. Для точек $\xi, \xi' \in A^\omega$ положим $\rho(\xi, \xi') = 1/k$, где k есть наименьшее из тех натуральных чисел, для которых $\alpha_k \neq \alpha'_k$. Аксиома треугольника верна в усиленной форме

$$\rho(\xi, \xi'') < \rho(\xi, \xi') + \rho(\xi', \xi''),$$

потому что из трех чисел $\rho(\xi, \xi'')$, $\rho(\xi, \xi')$ и $\rho(\xi', \xi'')$ по крайней мере два совпадают, а третье не превосходит их.

Так определенное метрическое пространство B_τ называется *бэровским пространством веса* τ.

3.14. Подмножество A топологического пространства X называется *всюду плотным* или *плотным* в X, если $X = [A]$.

Подмножество A топологического пространства X называется *нигде не плотным*, если $X \setminus [A]$ всюду плотно. Нигде не плотность множества A эквивалентна тому, что $\mathrm{Int}[A] = \varnothing$.

3.15. Наименьшая мощность плотных в X множеств называется *плотностью* пространства X и обозначается dX. Пространства счетной плотности называются *сепарабельными*.

3.16. *Весом* топологического пространства X называется наименьшая из мощностей его баз. Вес пространства X обозначается wX.

3.17. Предложение. *Для любого пространства X имеем $dX \leqslant wX$.*

Доказать самим.

3.18. Теорема. *В метрических пространствах плотность совпадает с весом. В частности, сепарабельные метрические пространства имеют счетную базу.*

Доказательство. Пусть A — плотное в X множество бесконечной мощности dX. Через $\mathfrak{B}$ обозначим множество всех $1/n$-окрестностей точек множества A для $n = 1, 2, \ldots$ Покажем, что $\mathfrak{B}$ — база в X. Пусть Ox — окрестность произвольной точки $x \in X$. Существует такое n, что $O(x, 2/n) \subset Ox$. В окрестности $O(x, 1/n)$ возьмем точку $a \in A$. Тогда $x \in O(a, 1/n) \subset \subset O(x, 2/n) \subset Ox$. Итак, $\mathfrak{B}$ — база, следовательно, $wX \leqslant dX$. Применение предложения 3.17 завершает доказательство теоремы.

Применяя теорему 3.18, читатель легко докажет следующие два утверждения.

3.19. Предложение. *Обобщенное гильбертово пространство H^τ веса τ имеет вес τ.*

3.20. Предложение. *Бэровское пространство B_τ веса τ имеет вес τ.*

3.21. Предложение. *Всякое метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть F_1, F_2 — непересекающиеся замкнутые подмножества метрического пространства X. Положим

$$OF_1 = \{x \in X : \rho(x, F_1) < \rho(x, F_2)\},$$
$$OF_2 = \{x \in X : \rho(x, F_2) < \rho(x, F_1)\}.$$

Ясно, что $F_i \subset OF_i$ и $OF_1 \cap OF_2 = \varnothing$. Пусть $x \in OF_1$ и $\varepsilon = [\rho(x, F_2) - \rho(x, F_1)]/2$. Тогда для произвольной точки $y \in \in O(x, \varepsilon)$ имеем

$$\rho(y, F_1) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, F_1) < \varepsilon + \rho(x, F_1).$$

В то же время

$$\rho(y, F_2) \geqslant \rho(x, F_2) - \rho(x, y) > \rho(x, F_2) - \varepsilon = \rho(x, F_1) + \varepsilon.$$

Таким образом, $y \in OF_1$ и, значит, множество OF_1 открыто. Аналогично, открыто и OF_2. Следовательно, X есть T_4-пространство. Кроме того, оно, очевидно, есть T_1-пространство. Предложение доказано.

3.22. Замечание. При доказательстве предложения 3.21 мы воспользовались неравенством

$$\rho(x, y) + \rho(y, F) \geqslant \rho(x, F).$$

Для его доказательства возьмем произвольную точку $z \in F$. Тогда $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z) \geqslant \rho(x, F)$. Поскольку в неравенстве

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, F)$$

правая часть не зависит от z, то, переходя к нижней грани в левой части, получаем искомое неравенство.

3.23. Предложение. *Всякое метрическое пространство совершенно нормально.*

Доказательство. В силу 3.21 достаточно показать, что всякое замкнутое подмножество F метрического пространства X есть G_δ-множество. Для этого достаточно проверить, что

$$F = \bigcap_{i=1}^{\infty} O(F, 1/i).$$

Включение $\subset$ очевидно. Если же $x \notin F$, то $\rho(x, F) > 0$ и, значит, $\rho(x, F) > 1/i$ для некоторого i. Поэтому $x \notin O(F, 1/i)$. Предложение доказано.

3.24. Последовательность $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ точек метрического пространства X называется *фундаментальной последовательностью*, или *последовательностью Коши*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ для любых $m, n \geqslant N$.

3.25. Последовательность $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ точек топологического (в частности, метрического) пространства X называется *сходящейся* к точке x, а точка x называется *пределом* этой последовательности, если во всякой окрестности Ox содержатся все члены последовательности ξ, начиная с некоторого. Легко проверить, что всякая сходящаяся последовательность точек метрического пространства является фундаментальной.

3.26. Предложение. *Последовательность точек в хаусдорфовом пространстве может иметь не более одного предела.*

Доказать самим.

3.27. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем сходится всякая фундаментальная последовательность.

3.28. Предложение. *Всякое замкнутое подмножество F полного метрического пространства X полно.*

Доказательство. Пусть $\xi \subset F$ — фундаментальная последовательность. Существует предел x последовательности ξ в X. По определению предела точка x есть точка прикосновения множества F, т. е. $x \in [F] = F$. Предложение доказано.

3.29. Теорема Бэра. *Пусть X — полное метрическое пространство, а $\{U_i\}$ — последовательность открытых всюду плотных подмножеств X. Тогда их пересечение также всюду плотно.*

Доказательство. Надо показать, что во всяком непустом открытом подмножестве V пространства X имеется точка из $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i$. Поскольку U_1 всюду плотно, множество $V \cap U_1$ не пусто. Возьмем точку $x_1 \in V \cap U_1$. Она содержится в этом открытом множестве вместе с некоторой своей ε_1-окрестностью. Уменьшая ε_1, можно считать даже, что $[O(x_1, \varepsilon_1)] \subset V \cap U_1$. Теперь найдем точку x_2 и такое $\varepsilon_2 > 0$, что $[O(x_2, \varepsilon_2)] \subset O(x_1, \varepsilon_1) \cap \cap U_2$. Уменьшая ε_2, можно считать, что $\varepsilon_2 < \varepsilon_1/2$. Таким образом, по индукции строится такая последовательность точек x_i и такая последовательность положительных чисел ε_i, что $\varepsilon_{i+1} < < \varepsilon_i/2$, $[O(x_{i+1}, \varepsilon_{i+1})] \subset O(x_i, \varepsilon_i) \cap U_{i+1}$. Имеем $\rho(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon_i$. Поэтому условие $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i/2$ влечет фундаментальность последовательности $\xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Пусть x — предел этой последовательности, существующий в силу полноты X.

Всякий k-хвост $\{x_k, x_{k+1}, \ldots\}$ последовательности ξ лежит в полном согласно 3.28 пространстве $[O(x_k, \varepsilon_k)]$ и, следовательно, имеет там предел. Но этот предел в силу 3.21 и 3.26 обязан совпадать с x. Итак, $x \in [O(x_k, \varepsilon_k)] \subset U_k$ для всякого k. Кроме того, $x \in [O(x_1, \varepsilon_1)] \subset V$. Значит, $x \in V \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i\right)$. Теорема Бэра доказана.

Из теоремы Бэра непосредственно вытекает

3.30. Предложение. *Полное метрическое пространство не может быть представлено в виде суммы счетного числа нигде не плотных подмножеств.*

3.31. Предложение. *Гильбертово произведение полных метрических пространств полно.*

Доказать самим.

Из этого предложения и доказываемой в анализе полноты числовой прямой вытекает

3.32. Следствие. *Гильбертово пространство H^ω и обобщенное гильбертово пространство H^τ полны.*

3.33. Предложение. *Бэровское пространство полно.*

Доказать самим.

3.34. Топологическое пространство X называется *метризуемым*, если на X существует такая метрика ρ, что метрическая топология пространства (X, ρ) совпадает с топологией пространства X.

Простейший пример метризуемого пространства — дискретное пространство X, которое превращается в метрическое пространство, если положим $\rho(x, y) = 1$ для любой пары различных точек множества X.

3.35. Метризуемое пространство X называется *топологически полным*, если X можно метризовать полной метрикой.

3.36. Теорема. *Всякое G_δ-подмножество полного метрического пространства топологически полно.*

Доказательство разобьем на несколько этапов.

1. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство. Положим $\rho^1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$. Тогда (X, ρ^1) — полное метрическое пространство, причем метрика ρ^1 порождает на X ту же топологию, что и метрика ρ.

В самом деле, при определении топологии метрического пространства и фундаментальных последовательностей в нем можно ограничиться ε-окрестностями точек при $\varepsilon < 1$. Но такие ε-окрестности для метрик ρ и ρ^1 одинаковы.

2. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство диаметра $\leqslant 1$ и U — открытое подмножество пространства X. Для каждой точки $x \in U$ положим $g(x) = \frac{1}{\rho(x, X \setminus U)}$, а для пары $x, y \in \in U$ положим

$$\rho_U(x, y) = \rho(x, y) + |g(x) - g(y)|.$$

Тогда ρ_U — полная метрика на U, порождающая ту же топологию, что и метрика ρ.

Проверка аксиом метрики предоставляется читателям. Тождественное отображение $(U, \rho_U) \to (U, \rho)$ не увеличивает расстояний и, следовательно, непрерывно. Обратное отображение непрерывно в силу непрерывности функции g. Пусть теперь последовательность $\xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ точек из U фундаментальна в метрике ρ_U. Тогда ξ тем более фундаментальна в метрике ρ и, значит, сходится к точке $x \in X$. Остается показать, что $x \in U$. По $\varepsilon = 1/2$ найдется такое m, что $\rho_U(x_m, x_n) < 1/2$ для всех $n \geqslant m$. Тем более $|g(x_m) - g(x_n)| < 1/2$. В частности, $g(x_n) < g(x_m) + 1/2$ или

$$\rho(x_n, X \setminus U) > \frac{1}{g(x_m) + 1/2}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\rho(x, X \setminus U) \geqslant \frac{1}{g(x_m) + 1/2} > 0.$$

3. Пусть X — метризуемое пространство, $Y = \bigcap\{U_n \colon n \in \in N^+\}$, где U_n открыты в X, ρ_n — полная метрика на U_n диаметра $\leqslant 1$. Тогда функция

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n(x, y)$$

является полной метрикой на пространстве Y.

В самом деле, если последовательность точек $\xi = \{x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n, \ldots\}$ сходится в метрике ρ, то она сходится, например, в метрике ρ_1 и, следовательно, сходится в топологии пространства Y. Наоборот, пусть ξ сходится к точке x в пространстве Y. Для $\varepsilon > 0$ найдется такое $m > 0$, что $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} 1/2^n < \varepsilon/2$. Для каждого k в пределах от 1 до m найдется такое $l = l(k)$, что для $l' \geqslant l$ имеем

$$\frac{1}{2^k} \rho_k(x_{l'}, x) < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Положив $l_0 = \max\{l(k) \colon 1 \leqslant k \leqslant m\}$, имеем

$$\rho(x_{l'}, x) < \varepsilon$$

для всех $l' \geqslant l_0$, т. е. ξ сходится к x в метрике ρ.

Наконец, полнота метрики ρ. Пусть последовательность ξ фундаментальна в метрике ρ. Тогда она фундаментальна в каждой метрике ρ_n и, следовательно, сходится к точке $y_n \in U_n$. Но согласно 3.26 все точки y_n совпадают между собой, т. е. ξ сходится в пространстве Y.

Из утверждений 1, 2 и 3 теорема 3.36 вытекает очевидным образом.

Из этой теоремы следует, что топологически полно пространство иррациональных чисел прямой, неполное в обычной метрике. В то же время пространство рациональных чисел прямой является суммой счетного числа нигде не плотных (одноточечных) множеств и, следовательно, не может быть метризовано полной метрикой в силу 3.27.

3.37. Предложение. *Пространство иррациональных чисел прямой гомеоморфно бэровскому пространству веса ω.*

Доказать самим.

3.38. Пространство $B(X,Y)$ ограниченных отображений в метрическое пространство Y. Пусть X — множество, Y — метрическое пространство, а $B(X,Y)$ — множество всех таких отображений $f\colon X \to Y$, что $\operatorname{diam} f(X) < \infty$. Введем на множестве $B(X,Y)$ *метрику равномерной сходимости*, т. е. положим

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in X} \rho(f(x),g(x)).$$

Поскольку множества $f(X)$ и $g(X)$ ограничены, число $\rho(f,g)$ определено. Из аксиом метрического пространства в проверке нуждается лишь аксиома треугольника. В неравенстве

$$\rho(f(x),g(x)) + \rho(g(x),h(x)) \geqslant \rho(f(x),h(x))$$

перейдем к верхней грани в левом слагаемом. Получим

$$\rho(f,g) + \rho(g(x),h(x)) \geqslant \rho(f(x),h(x)). \tag{9}$$

Затем, переходя к верхней грани в правом слагаемом, получаем

$$\rho(f,g) + \rho(g,h) \geqslant \rho(f(x),h(x)). \tag{10}$$

В этом неравенстве левая часть не зависит от x. Поэтому можно перейти к верхней грани в правой части:

$$\rho(f, g) + \rho(g, h) \geqslant \rho(f, h). \tag{11}$$

3.39. Предложение. *Если Y полно, то $B(X, Y)$ также полно.*

Доказательство. Пусть $\{f_i\}$ — фундаментальная последовательность в $B(X,Y)$. Тогда для произвольной точки $x \in \in X$ последовательность $\{f_i(x)\}$ фундаментальна в Y. Она имеет предел $f(x)$. Легко проверить, что таким образом определенное отображение $f\colon X \to Y$ ограничено, т. е. $f \in B(X,Y)$. Наконец, f — предел последовательности $\{f_i\}$. В самом деле, фиксируем $\varepsilon > 0$. В силу фундаментальности последовательности $\{f_i\}$ существует такое k, что $\rho(f_m, f_n) < \varepsilon/2$ для всех $m, n \geqslant k$. В частности,

$$\rho(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon/2 \tag{12}$$

для всех $m, n \geqslant k$ и всех $x \in X$. Переходя в неравенстве (12) к пределу при $n \to \infty$, имеем

$$\rho(f_m(x), f(x)) \leqslant \varepsilon/2 \tag{13}$$

для всякой точки $x \in X$. Значит, $f_m \in O(f, \varepsilon)$ для всех $m \leqslant k$. Поэтому $f = \lim f_i$. Предложение доказано.

3.40. Пусть теперь X — топологическое пространство. Обозначим через $BC(X,Y)$ подпространство $B(X,Y)$, состоящее из всех непрерывных отображений. Согласно 2.20 пространство $BC(X,Y)$ замкнуто в $B(X,Y)$. Поэтому в случае полного Y пространство $BC(X,Y)$ полно в силу 3.28 и 3.39.

§ 4. Бикомпактные пространства. Лемма Александера. Теорема Вейерштрасса–Стоуна. Компактность в метризуемых пространствах

4.1. Топологическое пространство называется *бикомпактным*, если из всякого его покрытия открытыми множествами (такие покрытия назовем *открытыми*) можно выделить конечное подпокрытие. Хаусдорфовы бикомпактные пространства называются *бикомпактами*.

4.2. Точка x называется *предельной точкой* множества $A \subset \subset X$, если во всякой окрестности точки x содержится бесконечно много точек множества A. Точка x называется *точкой полного накопления* множества $A \subset X$, если для всякой ее окрестности Ox множества A и $Ox \cap A$ равномощны.

4.3. Топологическое пространство называется *счетно-компактным* (или просто *компактным*), если из всякого его счетного открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

4.4. Теорема. *Топологическое T_1-пространство счетно-компактно тогда и только тогда, когда всякое его бесконечное подмножество имеет предельную точку.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что в X имеется бесконечное множество A без предельных точек. Переходя к подмножеству, можно считать, что множество A счетно. В T_1-пространстве всякое множество без предельных точек замкнуто. Поэтому множество $X \setminus A$ открыто. Поскольку множество A замкнуто и не имеет предельных точек, у всякой точки $x \in A$ существует окрестность Ox, пересекающаяся с множеством A в единственной точке x. Из счетного покрытия $\{X \setminus A, Ox\colon x \in A\}$ пространства X можно выделить конечное подпокрытие $\{X \setminus A, Ox_1, \ldots, Ox_k\}$. Тогда множество A состоит из k точек $x_1, \ldots, x_k$. Противоречие.

Достаточность. Предположим, что существует счетное открытое покрытие $u = \{U_1, U_2, \ldots\}$ пространства X, из которого нельзя выделить конечного покрытия. Переходя к подпокрытию, считаем, что $U_{i+1} \not\subset \bigcup\limits_{k=1}^{i} U_k$ для всякого $i = 1, 2, \ldots$ В каждой из разностей $U_{i+1} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{i} U_k$ выберем по точке x_i и положим $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Пусть теперь x — произвольная точка пространства X. Тогда x лежит в некотором элементе U_i покрытия u. Множество U_i является окрестностью точки x, пересекающейся с множеством A не более чем по $i - 1$ точке $x_1, \ldots, x_{i-1}$. Таким образом, множество A не имеет предельных точек. Противоречие. Теорема 4.4 доказана.

4.5. Топологическое пространство называется *финально-компактным*, если из всякого его открытого покрытия можно выделить счетное подпокрытие.

Таким образом, бикомпактность слагается из счетной компактности и финальной компактности. Отсюда и происходит слово «бикомпактность».

4.6. Предложение. *В финально-компактном пространстве X всякое несчетное множество регулярной мощности имеет точку полного накопления.*

Доказательство. Предположим, что существует множество $A \subset X$ несчетной регулярной мощности τ, не имеющее точек полного накопления. Тогда у всякой точки $x \in X$ существует окрестность Ox, пересекающаяся с множеством A по множеству мощности $< \tau$. Из покрытия $\{Ox\colon x \in X\}$ пространства X можно выделить счетное подпокрытие $\{Ox_1, Ox_2, \ldots\}$. Следовательно, множество A можно представить в виде счетной суммы множеств $A \cap Ox_i$ мощности $< \tau$, что противоречит регулярности и несчетности τ. Предложение 4.6 доказано.

Обратить это утверждение наподобие теоремы 4.4 невозможно. Существует пример пространства, финально-компактного в смысле точек полного накопления, но не финально-компактного в смысле покрытий [7].

4.7. Предложение. *Топологическое пространство бикомпактно тогда и только тогда, когда всякое его бесконечное подмножество имеет точку полного накопления.*

Доказать самим, применяя построения 4.4 и 4.6.

4.8. Система подмножеств множества X называется *центрированной*, если пересечение любого конечного числа ее элементов не пусто. Система непустых подмножеств множества X называется *направленной*, если для любых двух ее элементов A_1, A_2 существует третий элемент, лежащий в пересечении $A_1 \cap A_2$. Легко видеть, что всякая направленная система — центрированная. Обратное, вообще говоря, не верно.

Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторое семейство подмножеств множества X. Направленная подсистема $\mathscr{F} \subset \mathfrak{B}$ называется *фильтром* (в $\mathfrak{B}$), если для $F \in \mathscr{F}$ всякий элемент F' системы $\mathfrak{B}$ со свойством $F' \supset F$ принадлежит $\mathscr{F}$. В частности, получаем определения *открытого фильтра*, *замкнутого фильтра* и просто *фильтра*. Максимальные фильтры называются *ультрафильтрами*.

4.9. Теорема. *Для топологического пространства следующие условия эквивалентны*:

а) X *бикомпактно*;

б) *всякая центрированная система замкнутых множеств в* X *имеет непустое пересечение*;

в) *всякий замкнутый в* X *ультрафильтр имеет непустое пересечение*;

г) *для всякого ультрафильтра* $\mathfrak{A}$ *в* X *множество* $\bigcap\{[A]: A \in \in \mathfrak{A}\}$ *не пусто*.

Доказательство. Эквивалентность условий а) и б) вытекает из того, что система $\mathfrak{A} = \{A\}$ подмножеств X является центрированной тогда и только тогда, когда система $\{X \setminus A: A \in \in \mathfrak{A}\}$ не содержит никакого конечного покрытия X. Условия б) и в) эквивалентны, поскольку из леммы Цорна вытекает, что всякая центрированная система замкнутых множеств содержится в максимальной центрированной замкнутой системе, т.е. в ультрафильтре. Наконец, эквивалентность условий в) и г) вытекает из того, что для всякого ультрафильтра в X система замыканий его элементов является замкнутым в X ультрафильтром. Теорема доказана.

4.10. Предложение. *Свойства счетной компактности, финальной компактности и, следовательно, бикомпактности наследуются при переходе к замкнутому подпространству.*

Доказать самим.

4.11. Предложение. *Регулярное финально-компактное пространство* X *нормально.*

Доказательство. Пусть F_1, F_2 — замкнутые непересекающиеся подмножества X. В силу регулярности X для всякой точки $x \in F_1$ существует такая окрестность Ox, что $[Ox] \cap F_2 = = \varnothing$. Аналогично, для всякой точки $y \in F_2$ существует такая окрестность Oy, что $[Oy] \cap F_1 = 0$. Из покрытий $\{F_1 \cap Ox: x \in \in F_1\}$ и $\{F_2 \cap Oy: y \in F_2\}$ множеств F_1 и F_2 можно выбрать счетные подпокрытия $\{F_1 \cap Ox_i: i = 1, 2, \ldots\}$ и $\{F_2 \cap Oy_i: i = = 1, 2, \ldots\}$ в силу 4.10. Теперь, применяя нормализующую лемму

2.11, строим непересекающиеся окрестности множеств F_1 и F_2. Предложение доказано.

4.12. Предложение. *Всякий бикомпакт нормален.*

Доказательство. Согласно 4.11 достаточно показать, что всякий бикомпакт регулярен. Пусть $x \in X$ и F — замкнутое в X не содержащее точку x множество. Для всякой точки $y \in F$ существуют непересекающиеся окрестности $O_y x$ и Oy точек x и y соответственно. Согласно 4.10 из покрытия $\{F \cap Oy\colon y \in F\}$ множества F можно выбрать конечное подпокрытие $\{F \cap Oy_1, \ldots$ $\ldots, F \cap Oy_k\}$. Положив $Ox = \bigcap\limits_{i=1}^{k} O_{y_i}x$ и $OF = \bigcup\limits_{i=1}^{k} Oy_i$, получаем непересекающиеся окрестности точки x и множества F. Предложение доказано.

Имеет место более общее утверждение.

4.13. Предложение. *Пусть F — бикомпактное подмножество регулярного пространства X. Тогда для всякой окрестности OF существует такая окрестность O_1F, что $[O_1F] \subset OF$.*

Доказательство. В силу регулярности пространства X для всякой точки $x \in F$ существует такая окрестность Ox, что $[Ox] \subset OF$. Из покрытия $\{Ox\colon x \in F\}$ бикомпакта F выберем конечное подпокрытие $\{Ox_i\colon i = 1, \ldots, k\}$. Тогда, положив $O_1F = \cup\{Ox_i\colon i = 1, \ldots, k\}$, получим искомую окрестность множества F.

4.14. Пример (наследственно нормального не совершенно нормального бикомпакта). Пусть N — бесконечное множество и ξ — не принадлежащий ему элемент. Введем в множество $N \cup \xi$ топологию посредством задания базы (см. 1.21). В нее включим все одноточечные подмножества из N и множества вида $\xi \cup (N \setminus A)$, где A — конечное подмножество N. Так определенное на множестве $N \cup \xi$ пространство обозначим αN. Пространство αN, очевидно, бикомпактно и хаусдорфово, значит, нормально согласно 4.12. Возьмем произвольное открытое множество $U \subset \alpha N$. Если $U \subset N$, то пространство U дискретно и, следовательно, нормально. Если же $\xi \in U$, то U гомеоморфно αN и снова нормально. Поэтому в силу 2.10 бикомпакт αN наследственно нормален.

В то же время при несчетном N точка ξ не является G_δ-множеством и, значит, αN не совершенно нормально.

4.15. Предложение. *Непрерывный образ бикомпактного пространства бикомпактен.*

Доказать самим.

Из характеристики компактных подмножеств прямой и 4.15 получаем

4.16. Следствие. *Всякая непрерывная на бикомпакте функция принимает наибольшее и наименьшее значения.*

4.17. Предложение. *Бикомпакт замкнут во всяком объемлющем его хаусдорфовом пространстве.*

Доказательство. Пусть бикомпакт X лежит в хаусдорфовом пространстве Y. Для произвольной точки $y \in Y \setminus X$, применяя процедуру из 4.12, строим окрестность Oy, не пересекающуюся с X. Таким образом, всякая точка $y \in Y \setminus X$ — внутренняя для множества $Y \setminus X$. Значит, $Y \setminus X$ открыто, а X замкнуто. Предложение доказано.

4.18. Отображение $f: X \to Y$ называется *замкнутым* (*открытым*), если образ $f(A)$ всякого замкнутого (открытого) в X множества A замкнут (открыт) в Y. Из 4.10, 4.15 и 4.17 вытекает, что всякое непрерывное отображение бикомпактного пространства в хаусдорфово замкнуто.

Всякое замкнутое непрерывное взаимно однозначное отображение — гомеоморфизм. Поэтому имеем

4.19. Предложение. *Непрерывное взаимно однозначное отображение бикомпакта на хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.*

4.20. Лемма Александера. *Если в пространстве X существует такая предбаза $\mathfrak{B}$, что из любого покрытия пространства X ее элементами можно выбрать конечное подпокрытие, то X бикомпактно.*

Доказательство. Пусть u — открытое покрытие пространства X, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия. В силу леммы Куратовского–Цорна покрытие u можно дополнить до максимальной открытой системы v, никакая конечная подсистема которой не покрывает X. Покажем, что $v \cap \mathfrak{B}$ —

покрытие X. Для произвольной точки $x \in X$ существует содержащий ее элемент V покрытия v. Существуют такие элементы предбазы $G_1, \ldots, G_n$, что $x \in G_1 \cap \ldots \cap G_n \subset V$. Предположим, что никакое из множеств G_i не принадлежит v. Тогда в силу свойства покрытия v существуют такие множества $V_1^i, \ldots, V_{j(i)}^i \in \in v$, что

$$G_i \cup \left(\bigcup_{k=1}^{j(i)} V_k^i\right) = X \tag{1}$$

для каждого $i = 1, \ldots, n$. Из (1) вытекает

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\right) \cup \left(\bigcup_{i,k} V_k^i\right) = X. \tag{2}$$

Следовательно, семейство v содержит конечное подпокрытие $\{V, V_k^i \colon i, k\}$. Это противоречие показывает, что одно из множеств G_i принадлежит v. Итак, для всякой точки $x \in X$ получаем содержащее ее множество G_i, принадлежащее одновременно v и $\mathfrak{B}$. Значит, $v \cap \mathfrak{B}$ — покрытие. Из него по условию можно выделить конечное подпокрытие. Тем более конечное покрытие можно выделить из покрытия v. Это противоречие и заканчивает доказательство.

4.21. Обозначим $C(X)$ множество всех непрерывных функций на бикомпакте X. Множество $C(X)$ согласно 4.15 содержится в $B(X, \mathbb{R})$ и, будучи снабжено метрикой равномерной сходимости, совпадает с $BC(X, \mathbb{R})$. Множество $C(X)$ не только имеет структуру полного метрического пространства, но является линейным пространством и кольцом.

Пусть C_0 — подкольцо кольца $C(X)$, т. е. подгруппа, вместе с любыми двумя элементами содержащая их произведение. Тогда его замыкание $[C_0]$ — также подкольцо.

4.22. Теорема Вейерштрасса–Стоуна. *Пусть X — бикомпакт и C_0 — подкольцо кольца $C(X)$, содержащее все константы и разделяющее точки X (если $x \neq y$, то существует такая функция $\varphi \in C_0$, что $\varphi(x) \neq \varphi(y)$).*

Тогда C_0 всюду плотно в $C(X)$.

Эту теорему можно переформулировать следующим образом: если множество D функций на бикомпакте разделяет точки, то всякую функцию φ можно приблизить многочленами функций из D.

Доказательство. Для того чтобы показать, что C_0 плотно в $C(X)$, достаточно показать, что $[C_0]$ плотно в $C(X)$. Поэтому в силу сделанного в 4.21 замечания можно считать, что C_0 замкнуто в $C(X)$. Теперь докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если $x, y \in X$ и a, b — произвольные действительные числа, то существует такая функция $\varphi \in C_0$, что $\varphi x = a$, $\varphi y = b$.*

В самом деле, так как C_0 разделяет точки, существует такая функция $\psi \in C_0$, что $\psi x = \alpha \neq \beta = \psi y$. Поэтому можно положить

$$\varphi = a + \frac{b-a}{\beta - \alpha}(\psi - \alpha).$$

Лемма 2. *Если $\varphi \in C_0$, то $|\varphi| \in C_0$.*

Пусть $a = \max|\varphi|$. Тогда

$$|\varphi| = \sqrt{\varphi^2} = \sqrt{a^2 - a^2 + \varphi^2} = a\sqrt{1 - (1 - (\varphi/a)^2)} = a\sqrt{1-t},$$

где $t = 1 - (\varphi/a)^2$. Но $\sqrt{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ сходится равномерно при $0 \leqslant t \leqslant 1$ по признаку Раабе. В самом деле, из формулы Тейлора вытекает, что при $n \geqslant 1$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n-1/2}$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{3}{2} > 1.$$

Поскольку $t \in C_0$, то $\sqrt{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in [C_0] = C_0$.

Лемма 3. *Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C_0$, то $\min\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \in C_0$ и $\max\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \in C_0$.*

Доказательство проводим индукцией по k с применением леммы 2 и равенств

$$2\max\{\varphi, \psi\} = \varphi + \psi + |\varphi - \psi|,$$
$$2\min\{\varphi, \psi\} = \varphi + \psi - |\varphi - \psi|.$$

Возвращаемся к доказательству теоремы. Надо проверить, что в ε-окрестности произвольной функции φ содержатся функции из C_0. Пусть $x, y \in X$ — произвольные точки. По лемме 1 существует такая функция $\psi_{xy} \in C_0$, что $\psi_{xy}(x) = \varphi(x)$ и $\psi_{xy}(y) = \varphi(y)$. В силу непрерывности функций φ и ψ_{xy} существуют такие окрестности $U_{xy}(x)$ и $V_{xy}(y)$ точек x и y, что

$$\varphi(t) - \varepsilon < \psi_{xy}(t) < \varphi(t) + \varepsilon \tag{3}$$

для любой точки $t \in U_{xy}(x) \cup V_{xy}(y)$. Зафиксируем точку y. Из покрытия $\{U_{xy}(x)\colon x \in X\}$ бикомпакта X можно выбрать конечное подпокрытие $\{U_{x_1y}(x_1), \dots, U_{x_ky}(x_k)\}$. Положим $Wy = \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_{x_iy}(y)$ и $\psi_y = \min\{\psi_{x_1y}, \dots, \psi_{x_ky}\}$. Тогда из (3) вытекает

$$\varphi(t) - \varepsilon < \psi_y(t) < \varphi(t) + \varepsilon \tag{4}$$

для всякой точки $t \in Wy$ и

$$\psi_y(t) < \varphi(t) + \varepsilon \tag{5}$$

для всякой точки $t \in X$. Из покрытия $\{Wy\colon y \in X\}$ выберем конечное подпокрытие $\{Wy_1, \dots, Wy_s\}$ и положим $\psi = \max\{\psi_{y_1}, \dots \dots, \psi_{y_s}\}$. Тогда из (4) имеем $\varphi - \varepsilon < \psi$, а из (5) имеем $\psi < \varphi + \varepsilon$. Таким образом, $\psi \in O(\varphi, \varepsilon)$, а $\psi \in C_0$ согласно лемме 3. Теорема доказана.

4.23. Следствие. *Всякая непрерывная функция на отрезке есть предел равномерно сходящейся последовательности многочленов.*

4.24. Пусть Y — подмножество метрического пространства X, и пусть $\varepsilon > 0$. Множество Y называется ε-сетью в пространстве X, если для любой точки $x \in X$ найдется точка $y \in Y$, отстоящая от x на расстояние $< \varepsilon$. Метрическое пространство называется *вполне ограниченным*, если оно при любом $\varepsilon > 0$ содержит некоторую конечную ε-сеть.

4.25. Предложение. *Всякое счетно-компактное метричгское пространство X вполне ограничено.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ пространство X не содержит никакой конечной ε-сети. Тогда строится бесконечная последовательность точек

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

каждая из которых отстоит от всех предыдущих на расстояние $\geqslant \varepsilon$. В силу неравенства треугольника из этой последовательности нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность, что противоречит теореме 4.4.

4.26. Предложение. *Всякое счетно-компактное метрическое, пространство X имеет счетную базу.*

Доказательство. Согласно 3.18 достаточно показать, что X сепарабельно. Согласно 4.25 в X можно выбрать конечную $1/n$-сеть A_n для всех $n = 1, 2, \ldots$ Тогда ясно, что множество $A = \cup\{A_n \colon n = 1, 2, \ldots\}$ и будет счетным плотным в X множеством.

Из 4.5, 4.26 и из того, что всякое пространство со счетной базой финально-компактно, вытекает

4.27. Теорема. *Всякое счетно-компактное метризуемое пространство бикомпактно.*

Таким образом, в метризуемых пространствах понятия счетной компактности и бикомпактности совпадают. Впредь называем метризуемые бикомпакты компактами.

4.28. Теорема. *Для того чтобы метрическое пространство X было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было полным и вполне ограниченным.*

Доказательство. Необходимость вытекает из 4.4 и 4.25. Пусть теперь X — полное и вполне ограниченное пространство. Достаточно показать, что из всякой бесконечной последовательности $\xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ можно выбрать фундаментальную подпоследовательность. Из полной ограниченности пространства X вытекает, что в нем всякое бесконечное множество содержит бесконечное подмножество сколь угодно малого диаметра. Поэтому можно построить такую вложенную последовательность бесконечных множеств

$$\xi = \xi_1 \supset \xi_2 \supset \ldots,$$

что выполнены условия:

1) $\operatorname{diam}\xi_i \to 0$ при $i \to \infty$;

2) существует такая точка $x_{n_i} \in \xi_i \setminus \xi_{i+1}$, номер которой предшествует номерам всех точек из ξ_{i+1}.

Тогда последовательность $\xi_0 = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\}$ согласно 2) будет подпоследовательностью последовательности ξ. Условие 1) гарантирует нам фундаментальность последовательности ξ_0. Теорема доказана.

4.29. Предложение. *Пусть A — такое подмножество метрического пространства X, что из всякого бесконечного его подмножества можно выделить последовательность, сходящуюся в X. Тогда $[A]$ — компакт.*

Доказательство. Из условия вытекает, что множество A (и, значит, $[A]$) вполне ограничено. Следовательно, согласно 4.28 достаточно проверить полноту множества $[A]$. Для этого достаточно из всякой фундаментальной последовательности $\xi \subset [A]$ выделить сходящуюся подпоследовательность, для чего в свою очередь достаточно рассмотреть два случая: 1) $\xi \subset A$; 2) $\xi \subset [A] \setminus A$. В случае 1) последовательность ξ сходится по условию. В случае 2) для точки $x_n \in \xi$ можно найти точку $a_n \in A$, отстоящую от x_n на расстояние $< 1/2^n$. Выберем из последовательности $\alpha = \{a_1, a_2, \ldots\}$ подпоследовательность $\alpha_1 = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\}$, сходящуюся к точке $x \in [A]$. Тогда последовательность $\xi_1 = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\}$ сходится к той же точке x. Предложение доказано.

Глава II

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

§ 1. Определения произведения топологических пространств и отображений

1.1. Пусть $\prod\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$ — декартово произведение некоторого семейства множеств, т.е. множество всех таких отображений $x\colon \mathrm{A} \to \bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} X_\alpha$, что $x(\alpha) \in X_\alpha$.

Если $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, то определена естественная проекция $p_\mathrm{B}\colon \prod\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\} \to \prod\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{B}\}$, ставящая в соответствие точке произведения x (отображению $x\colon \mathrm{A} \longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} X_\alpha$) ее ограничение на множество B. Эту проекцию иногда обозначаем также p^A_B. Если B состоит из одного элемента α, то p_B обозначим p_α.

Если $x \in \prod\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$, то $x(\alpha)$ называем α-координатой точки x и обозначаем ее чаще x_α.

1.2. Пусть теперь сомножители X_α произведения $X = \prod\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$ являются топологическими пространствами. Тогда на множестве X можно рассмотреть наименьшую топологию, относительно которой все проекции $p_\alpha\colon X \to X_\alpha$ непрерывны (см. I.1.23). Топология эта называется тихоновской топологией произведения. Множество X с этой топологией называется ***топологическим***, или ***тихоновским***, или просто произведением пространств X_α.

Согласно I.1.23 предбазу пространства X образуют всевозможные множества вида $p_\alpha^{-1}(U)$, где U открыто в X_α, а базу, следовательно, всевозможные конечные их пересечения $p_{\alpha_1}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap p_{\alpha_s}^{-1}(U_s)$.

1.3. Предложение. *Пусть X — топологическое произведение пространств X_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, и пусть $f\colon Y \to X$ — такое отображение, что все композиции $p_\alpha \circ f\colon Y \to X_\alpha$ непрерывны. Тогда отображение f также непрерывно.*

Доказательство. Согласно I.1.19 достаточно проверить открытость прообразов $f^{-1}(V)$ для элементов V некоторой предбазы на X. Взяв в качестве предбазы семейство $\{p_\alpha^{-1}(U)\colon U$ открыто в $X_\alpha\}$, достигаем желаемого.

1.4. Понятие категории. Пусть $\mathscr{C} = \{\mathscr{O}, \mathfrak{M}\}$ — семейство элементов двух сортов. Элементы из $\mathscr{O}$ называются *объектами*, а элементы из $\mathfrak{M}$ — *морфизмами*. Для каждого морфизма f определена единственная упорядоченная пара (X, Y) объектов, и f называется морфизмом из X в Y. В этой ситуации X иногда обозначают $\operatorname{dom} f$, а Y обозначают $\operatorname{rng} f$. Семейство всех морфизмов из X в Y обозначается $[X, Y]$.

Семейство $\mathscr{C} = \{\mathscr{O}, \mathfrak{M}\}$ называется *категорией*, если выполнены следующие условия:

а) для каждой пары морфизмов f и g с $\operatorname{rng} f = \operatorname{dom} g$ определен единственный морфизм h с $\operatorname{dom} h = \operatorname{dom} f$ и $\operatorname{rng} h = \operatorname{rng} g$, называемый *композицией морфизмов* f и g и обозначаемый $g \circ f$;

б) для каждого объекта $X \in \mathscr{O}$ существует единственный морфизм из X в X, обозначаемый id_X, такой, что

$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X$$

для всякого морфизма $f\colon X \to Y$;

в) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ для всякой тройки морфизмов с $\operatorname{rng} f = \operatorname{dom} g$ и $\operatorname{rng} g = \operatorname{dom} h$.

1.5. Примеры категорий: топологические пространства и непрерывные отображения, группы и гомоморфизмы, линейные пространства и линейные отображения и т. д. Во всех этих категориях id_X — это тождественное отображение X, а композиции морфизмов суть обычные композиции отображений.

1.6. Пусть $\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$ — некоторое множество объектов категории $\mathscr{C}$. Объект $X \in \mathscr{C}$ и множество морфизмов $p_\alpha\colon X \to X_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{A}$, называется (*категорным*) *произведением* множества $\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$, если для всякого набора $\{Y, q_\alpha\colon Y \to X_\alpha\}$

существует единственный морфизм $h\colon Y \to X$ такой, что $p_\alpha \circ$ $\circ\, h = q_\alpha$.

1.7. Из определения вытекает *единственность* категорного произведения с точностью до *изоморфизма*, т.е. морфизма $f\colon X \to Y$, для которого существует такой морфизм $g\colon Y \to X$, что $g \circ f = \mathrm{id}_X$ и $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

В самом деле, предположив существование двух произведений $\{X, p_\alpha\}$ и $\{Y, q_\alpha\}$, получаем существование таких морфизмов $g\colon X \to Y$ и $h\colon Y \to X$, что $p_\alpha \circ h = q_\alpha$ и $q_\alpha \circ g = p_\alpha$. Рассмотрим композицию $k = h \circ g\colon X \to X$. Это такой морфизм, что $p_\alpha \circ k = p_\alpha \circ (h \circ g) = (p_\alpha \circ h) \circ g = q_\alpha \circ g = p_\alpha$. Но по определению произведения существует единственный морфизм k со свойством $p_\alpha \circ k = p_\alpha$. В то же время ясно, что таким морфизмом является id_X. Значит, $h \circ g = \mathrm{id}_X$. Аналогично, $g \circ h = \mathrm{id}_Y$, чем доказана единственность произведения.

В то же время произведение существует не во всякой категории. Один из простейших примеров: категория, состоящая из двух пространств — «связного» и «слипшегося» двоеточий — и всех их непрерывных отображений. Проверить.

1.8. Предложение. *В категории всех топологических пространств и всех их непрерывных отображений категорное произведение существует и совпадает с тихоновским.*

Доказательство. Ввиду единственности категорного произведения достаточно проверить категорность тихоновского произведения. Пусть $q_\alpha\colon Y \to X_\alpha$ — непрерывные отображения. Из условия $p_\alpha \circ h = q_\alpha$ отображение $h\colon Y \to \prod\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$ определяется однозначно, а именно $h(y)(\alpha) = q_\alpha(y)$. Непрерывность же так определенного отображения h вытекает из 1.3. Предложение доказано.

1.9. Предложение. *Произведение подпространств $Y_\alpha \subset X_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{A}$, совпадает с подпространством* $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} p_\alpha^{-1}(Y_\alpha)$ *произведения* $\prod\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$.

Доказать самим.

1.10. Пусть $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{A}$, — отображения. Тогда отображение $f\colon \prod X_\alpha \to \prod Y_\alpha$, определяемое равенствами

$f(x)(\alpha) = f_\alpha(x(\alpha))$, называется *произведением отображений* и обозначается $\prod\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} f_\alpha$.

Произведение f непрерывных отображений f_α непрерывно в силу 1.3, поскольку $q_\alpha \circ f = f_\alpha \circ p_\alpha$.

1.11. Пусть $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{A}$, — отображения. Тогда отображение $f\colon X \to \prod Y_\alpha$, определяемое равенствами $f(x)(\alpha) = f_\alpha(x)$, называется *диагональным произведением отображений* f_α и обозначается $\mathop{\Delta}\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} f_\alpha$.

Диагональное произведение f непрерывных отображений f_α непрерывно согласно 1.3, поскольку $q_\alpha \circ f = f_\alpha$.

§ 2. Послойное и веерное произведение отображений и пространств

2.1. Определения. Пусть дано семейство непрерывных отображений $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y$, $\alpha \in \mathrm{A}$, на Y. В произведении Y^{A} рассмотрим диагональ

$$\Delta(Y^{\mathrm{A}}) = \{y = (y_\alpha) \in Y^{\mathrm{A}}\colon y_\alpha = y_\beta \,\forall\, \alpha, \beta \in \mathrm{A}\}.$$

Обозначим X прообраз диагонали $\Delta(Y^{\mathrm{A}})$ относительно отображения $\prod\{f_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$, а через f_{A} — ограничение этого отображения на множество X. Естественный гомеоморфизм диагонали $\Delta(Y^{\mathrm{A}})$ на Y обозначим δ_Y^{A} (отображение δ_Y^{A} ставит в соответствие точке $(y_\alpha) \in \Delta(Y^{\mathrm{A}})$ любую из ее координат). Композицию $\delta_Y^{\mathrm{A}} \circ f_{\mathrm{A}}$ обозначим f. Назовем X *веерным произведением* пространств X_α относительно семейства отображений $\{f_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$ и обозначим через $\prod\{X_\alpha, f_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$. Если Y одноточечно, то веерное произведение совпадает с обычным. Отображение f назовем *послойным произведением* семейства отображений $\{f_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$ и обозначим $\prod\{f_\alpha\colon X_\alpha \to Y, \alpha \in \mathrm{A}\}$.

Ограничения $\pi_\beta\colon X \to X_\beta$ проекций $p_\beta\colon \prod\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} X_\alpha \to X_\beta$ назовем *проекциями веерного произведения* X в сомножители X_β.

2.2. Предложение. *В обозначениях предыдущего пункта $f = f_\alpha \circ \pi_\alpha$ для любого $\alpha \in \mathrm{A}$.*

Доказательство. Пусть $x = (x_\beta) \in X$. Тогда $f_\alpha \pi_\alpha(x) = f_\alpha(x_\alpha)$. С другой стороны, $f_{\mathrm{A}}(x) = (f_\beta(x_\beta))$, а δ_Y^{A} переводит эту точку в любую из ее координат, например в $f_\alpha(x_\alpha)$. Итак, $f(x) = \delta_Y^A f_A(x) = f_\alpha(x_\alpha)$. Предложение доказано.

Так как топология в X индуцируется топологией произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, то с учетом 2.2 имеет место

2.3. Предложение. *Для любой точки $y \in Y$ ее прообраз $f^{-1}(y)$ совпадает с произведением $\prod\limits_{\alpha\in A} f_\alpha^{-1}(y)$. Для любой точки $x_\alpha \in X_\alpha$ ее прообраз $\pi_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ совпадает с произведением $\{x_\alpha\} \times \prod\limits_{\beta\neq\alpha} f_\beta^{-1} f_\alpha^{-1}(x_\alpha)$.*

Итак, *слои* (полные прообразы точек) отображения f являются произведениями слоев отображений f_α. Поэтому отображение f и называется ***послойным произведением*** отображений f_α. ***Веерным произведением*** отображений $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y$, $\alpha \in A$, назовем послойное произведение этих отображений вместе с набором проектирований $\pi_\alpha\colon X \to X_\alpha$. Веерное произведение двух отображений называется ***декартовым квадратом.***

2.4. Категория Top_Y. *Объекты* этой категории — непрерывные отображения на данное пространство Y, называемые иногда пространствами над базой Y. *Морфизмом*, связывающим два объекта $f_1 : X_1 \to Y$ и $f_2\colon X_2 \to Y$, является такое (не предполагаемое эпиморфизмом) отображение $g\colon X_1 \to X_2$, что $f_2 \circ g = f_1$, тождественным отображением объекта $f\colon X \to X$ является отображение id_X.

2.5. Теорема. *Послойное произведение отображений $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y$ является произведением в категории* Top_Y.

Доказательство. Заметим, что $f\colon X \to Y$ — отображение на Y (в силу 2.3). Пусть $g\colon Z \to Y$ — объект и $\{q_\alpha\colon Z \to X_\alpha, \alpha \in A\}$ — семейство морфизмов этого объекта в объекты $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y$. Из 1.8 вытекает существование такого единственного непрерывного отображения $h'\colon Z \to \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, что $p_\alpha \circ h' = q_\alpha$. Пусть $X = \prod\{X_\alpha, f_\alpha\colon \alpha \in A\}$. Поскольку q_α — морфизм из g в f_α, имеем $g = f_\alpha \circ q_\alpha$. Тогда

$$f_\alpha \circ p_\alpha \circ h' = f_\alpha \circ q_\alpha = g \quad \forall\alpha \in A. \tag{1}$$

Значит, для всякого $z \in Z$ имеем

$$h'(z) \subset \bigcap_{\alpha \in \mathrm{A}} p_\alpha^{-1} f_\alpha^{-1} g(z) = \prod_{\alpha \in \mathrm{A}} f_\alpha^{-1} g(z). \tag{2}$$

Таким образом, $h'Z \subset X$ согласно 2.3. Отображение h', рассматриваемое как отображение в X, обозначим h. Тогда равенства (1) превращаются в $f_\alpha \circ \pi_\alpha \circ h = g$, а с учетом 2.2 имеем $f \circ h = g$. Кроме того, равенство $p_\alpha \circ h' = q_\alpha$ превращается в $\pi_\alpha \circ h = q_\alpha$. Итак, построен морфизм h из g в f, удовлетворяющий условию категорного произведения (см. 1.6).

Проверим его единственность. Пусть $k\colon Z \to X$ таково, что

$$f \circ k = g \tag{3}$$

и

$$\pi_\alpha \circ k = q_\alpha. \tag{4}$$

Обозначим k' композицию $k\colon Z \to X \hookrightarrow \prod\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} X_\alpha$. Тогда равенство (4) даст нам $p_\alpha \circ k' = q_\alpha$ и, в силу категорности топологического произведения, $k' = h'$, а следовательно, и $k = h$. Теорема доказана.

§ 3. Теоремы Тихонова

3.1. Первая теорема Тихонова. *Произведение бикомпактных пространств бикомпактно.*

Доказательство. Пусть $X = \prod\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} X_\alpha$. Согласно лемме Александера (см. I.4.20) достаточно показать, что из покрытия u пространства X, состоящего из множеств вида $p_\alpha^{-1}V$, где V открыто в X_α, можно выделить конечное подпокрытие. Для этого в силу бикомпактности сомножителей X_α достаточно найти такой индекс α, что для всякой точки $x \in X_\alpha$ имеем $p_\alpha^{-1}(x) \subset \subset U \in u$. Пусть этого сделать нельзя. Тогда для всякого α из индексирующего множества найдется такая точка $x_\alpha \in X_\alpha$, что множество $p_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ не лежит ни в одном из элементов покрытия u. Отсюда вытекает, что точка $x = \bigcap\limits_\alpha p_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ не лежит ни в одном из элементов покрытия u. Это противоречие и доказывает теорему.

3.2. Предложение. *Произведение T_i-пространств есть T_i-пространство, $i = 0, 1, 2, 3$. В частности, произведение регулярных пространств регулярно.*

Доказать самим.

Из 3.1 и 3.2 вытекает

3.3. Следствие. *Произведение бикомпактов — бикомпакт.*

3.4. Пример (нормального финально-компактного пространства, квадрат которого не нормален). На отрезке $[0; 1]$ числовой прямой рассмотрим топологию, базу которой образуют всевозможные полуинтервалы $[a; b)$. Семейство таких полуинтервалов образует базу топологии, поскольку оно содержит все свои конечные пересечения и является, очевидно, покрытием. Отрезок $[0; 1]$ с такой топологией обозначим X. Это пространство, а вернее его подпространство $X \setminus \{1\}$, называется «стрелкой».

1. Пространство X регулярно. В самом деле, аксиома T_1 очевидна. Что же касается аксиомы T_3, то она выполнена, поскольку всякий полуинтервал $[a; b)$ одновременно открыт и замкнут в X.

2. Пространство X финально-компактно. В самом деле, предположим, что из некоторого открытого покрытия u нельзя выделить счетного подпокрытия. Пусть a — точная нижняя грань таких чисел $b \leqslant 1$, что отрезок $[0; b]$ нельзя покрыть счетным числом элементов покрытия u. Тогда полуинтервал $[0; a)$ как сумма счетного числа отрезков $[0; r]$ ($r < b$ и r рационально) покрывается счетным подсемейством v из u. Но точка a лежит в некотором элементе $U \in u$ вместе с полуинтервалом $[a; c)$. Тогда при любом d, $a < d < c$, отрезок $[0; d]$ покрывается счетным семейством $v \cup \{U\} \subset u$, что противоречит минимальности a.

3. Пространство X, будучи регулярным и финально-компактным, нормально (см. I.4.11).

4. Квадрат $X \times X$ не нормален. В самом деле, рассмотрим побочную диагональ в квадрате, т. е. множество Y точек вида $(a, 1 - a)$. Поскольку полуоткрытые прямоугольники вида $[a; b) \times \times [1 - a; c)$ образуют базу окрестностей точки $(a, 1 - a) \in Y$, то всякая точка Y изолирована в Y, т. е. Y — дискретное подпространство произведения $X \times X$. В то же время Y замкнуто

в $X \times X$. Поэтому всякое подмножество из Y замкнуто в $X \times X$. Пусть P состоит из всех рациональных точек Y, т.е. точек вида $(r, 1-r)$, где r рационально, а Q состоит из всех иррациональных точек.

Множества P и Q замкнуты в $X \times X$ и не пересекаются. Предположим, что их можно заключить в непересекающиеся окрестности U и V. Для всякой точки $q = (a, 1-a) \in Q$ и рационального числа r положим $O_q^r = [a; a+r) \times [1-a; 1-a+r)$. Множество Q — счетная сумма множеств $Q^r = \{q \in Q : O_q^r \subset V\}$. Из теоремы Бэра (см. I.3.29) вытекает, что все множества Q^r не могут быть нигде плотными на отрезке $[(0,1); (1,0) = Y]$, рассматриваемом как подпространство евклидовой плоскости. Значит, существует отрезок $[p_1; p_2] \subset Y$, на котором некоторое множество Q^r всюду плотно. Тогда всякая окрестность Op точки $p \in P \cap [p_1; p_2]$ пересекается с $\bigcup\limits_{q \in Q^r} O_q^r$. Тем более $U \cap V \neq \varnothing$. Противоречие.

5. Пространство X является также примером финально-компактного пространства, квадрат которого не финально-компактен. В самом деле, это следует, например, из I.4.11 и 3.2. Кроме того, $X \times X$ дает пример регулярного согласно 3.2 пространства, которое не нормально.

3.5. Предложение. *Произведение $\tau \geqslant \omega$ штук пространств X_α веса $wX_\alpha \leqslant \tau$ имеет вес $\leqslant \tau$.*

Доказательство. Фиксируем в каждом пространстве X_α базу $\mathfrak{B}_\alpha$ мощности $\leqslant \tau$. Тогда всевозможные множества вида $p_\alpha^{-1} U$, где $U \in \mathfrak{B}_\alpha$, дают предбазу $\mathfrak{B}$ произведения мощности $\leqslant \tau$. Всевозможные конечные пересечения элементов из $\mathfrak{B}$ образуют базу произведения мощности $\leqslant \tau$. Предложение доказано.

3.6. Предложение. *Если $Y \subset X$, то $wY \leqslant wX$.*

Вытекает из того, что для любой базы $\mathfrak{B}$ в X семейство $\{Y \cap U : U \in \mathfrak{B}\}$ будет базой в Y.

3.7. Бикомпакт I^τ, являющийся произведением $\tau \geqslant \omega$ экземпляров отрезка $I = [0; 1]$ числовой прямой, называется *тихоновским кубом веса τ*. Покажем, что на самом деле вес I равен τ. Из 3.5 вытекает, что $wI^\tau \leqslant \tau$. Для доказательства противоположного неравенства согласно 3.6 достаточно найти I^τ — подпространство Y веса τ. Пусть $I^\tau = \prod\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$. Возьмем точку $y_\alpha \in I^\tau$ такую, что $p_\alpha(y_\alpha) = 1$ и $p_\beta(y_\alpha) = 0$ при $\beta \neq \alpha$. Теперь положим $Y = \{y_\alpha\colon \alpha \in A\}$. В отрезке I_α возьмем полуинтервал $(0; 1]$ и положим $U_\alpha = p_\alpha^{-1}((0; 1])$. Тогда множество $Y \cap U_\alpha$ будет окрестностью точки y_α в Y, причем одноточечной. Итак, все точки пространства Y изолированы. Значит, $wY = |Y| = |A| = \tau$.

3.8. Топологическое пространство X называется *T_ρ-пространством*, если для всякой точки $x \in X$ и всякого не содержащего ее непустого замкнутого множества $F \subset X$ существует такая непрерывная функция $\varphi\colon X \to I$, что $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(F) = 1$.

Слипшееся двоеточие показывает, что из T_ρ не следует даже T_0.

3.9. Топологическое пространство, одновременно удовлетворяющее аксиомам T_0 и T_ρ, называется *вполне регулярным*, или *тихоновским*. Всякое вполне регулярное пространство регулярно, поскольку T_ρ влечет T_3.

3.10. Предложение. *Всякое нормальное пространство вполне регулярно.*

Это следует из леммы Урысона. Хотя эта лемма верна для любого T_4-пространства, из T_0 плюс T_4 не вытекает полная регулярность. Обратить предложение 3.10 также невозможно (см. 3.4).

3.11. Вторая теорема Тихонова. *Всякое вполне регулярное пространство X веса τ гомеоморфно подмножеству тихоновского куба I^τ.*

Доказательство. Если τ конечно, то X, будучи T_1-пространством (см. 3.9 и I.2.6), состоит из конечного числа изолированных точек и, следовательно, гомеоморфно подмножеству отрезка I. Пусть теперь τ бесконечно.

Назовем множество Φ непрерывных функций $\varphi\colon X \to I$ *расчленяющим* пространство X, если для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности Ox существует такая функция $\varphi \in \Phi$, что $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(X \setminus Ox) = 1$. Вторая теорема Тихонова будет доказана, если докажем следующие два предложения.

А. Во всяком вполне регулярном пространстве X веса τ существует расчленяющее множество функций мощности $\leqslant \tau$.

Б. Если в T_0-пространстве X существует расчленяющее множество непрерывных функций мощности τ, то существует гомеоморфизм f пространства X в I^τ.

Лемма. *Пусть x — точка вполне регулярного пространства X и Ox — ее окрестность. Тогда существует такая меньшая окрестность O_1x, что множества $[O_1x]$ и $X \setminus Ox$ функционально отделимы, т. е. существует такая непрерывная функция $\varphi\colon X \to I$, что $\varphi([O_1x]) = 0$ и $\varphi(X \setminus Ox) = 1$.*

Для доказательства этой леммы возьмем какую-нибудь непрерывную функцию $\psi\colon X \to I$, равную 0 в точке x и 1 на множестве $X \setminus Ox$. Положим $O_1x = \{x \in X\colon \psi(x) < 1/2\}$ и $\varphi = \max\{0, 2\psi - 1\}$. Функция $\varphi\colon X \to I$, непрерывная согласно I.1.15, очевидно, и является искомой.

Доказательство предложения А. Возьмем в пространстве X базу $\mathfrak{B} = \{U_\mu\}$ мощности τ. Пару $\pi_\alpha = (U_\mu, U_\nu)$, где $U_\mu, U_\nu \in \mathfrak{B}$, назовем *канонической*, если $[U_\mu] \subset U_\nu$ и множества $[U_\mu]$ и $X \setminus U_\nu$ функционально отделимы. Множество всех канонических пар имеет мощность $\leqslant \tau$. Для каждой канонической пары $\pi_\alpha = (U_\mu, U_\nu)$ зафиксируем непрерывную функцию $\varphi_\alpha\colon X \to I$, равную 0 на $[U_\mu]$ и 1 на $X \setminus U_\nu$. Покажем, что множество Φ таким образом фиксированных функций φ_α является расчленяющим. Пусть V — произвольная окрестность точки x. Возьмем содержащуюся в V окрестность $Ox = U_\nu \in \mathfrak{B}$ и подберем к ней согласно лемме окрестность O_1x. Возьмем теперь окрестность $O_2x = U_\mu \subset O_1x$ из базы $\mathfrak{B}$. Пара (U_μ, U_ν) — каноническая пара π_α. Значит, $\varphi_\alpha[U_\mu] = 0$ и $\varphi_\alpha(X \setminus U_\nu) = 1$. Тем более $\varphi_\alpha(x) = 0$ и $\varphi_\alpha(X \setminus V) = 1$. Предложение А доказано.

Доказательство предложения Б. Пусть $\Phi = \{\varphi_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$, $|\mathrm{A}| = \tau$, — расчленяющее множество непрерывных функций $\varphi_\alpha\colon X \to I_\alpha = [0; 1]$. Положим

$$f = \mathop{\Delta}_{\alpha \in \mathrm{A}} \varphi_\alpha\colon X \to \prod_{\alpha \in \mathrm{A}} I_\alpha = I^\tau$$

Отображение f непрерывно согласно 1.11. Покажем, что оно взаимно однозначно. Пусть x, y — различные точки T_0-пространства X. Для одной из них, например, для x, существует окрестность Ox, не содержащая y. По определению расчленяющего множества существует такая функция $\varphi_\alpha \in \Phi$, что $\varphi_\alpha(x) = 0$ и $\varphi_\alpha(X \setminus Ox) = 1$, в частности, $\varphi_\alpha(y) = 1$. Тогда α-координаты $\varphi_\alpha(x)$ и $\varphi_\alpha(y)$ точек $f(x)$ и $f(y)$ различны, так что $f(x) \neq f(y)$.

Покажем теперь, что непрерывно отображение $f^{-1}\colon f(X) \to X$. Пусть $y = (t_\alpha) \in f(X)$ и $f^{-1}(y) = x$. К произвольной окрестности Ox точки x требуется подобрать такую окрестность Oy в I^τ, что $f^{-1}(Oy \cap f(X)) \subset Ox$. Берем функцию φ_α так, что $\varphi_\alpha(x) = 0$ и $\varphi_\alpha(X \setminus Ox) = 1$. Тогда множество $p_\alpha^{-1}[0;1))$ — окрестность точки Oy точки y, поскольку $p_\alpha(y) = \varphi_\alpha(x) = 0$. Пусть теперь $z \in f^{-1}(Oy \cap f(X))$. Тогда $\varphi_\alpha(z) = p_\alpha(f(z)) < 1$, поскольку $f(z) \in Oy$. Следовательно, $z \in Ox$. Предложение Б, а, значит, и вторая теорема Тихонова доказаны.

Выведем еще одно следствие из предложения А.

3.12. Теорема. *Пусть X — бикомпакт бесконечного веса τ. Тогда в пространстве $C(X)$ содержится плотное подмножество мощности $\leqslant \tau$.*

Доказательство. По предложению А в $C(X)$ существует множество F мощности $\leqslant \tau$, разделяющее точки бикомпакта X. Считаем, кроме того, что F содержит все конечные произведения своих элементов, а также функцию 1_X, тождественно равную 1. Рассмотрим два подкольца C и C_r кольца $C(X)$. Кольцо C состоит из всех (конечных) линейных комбинаций элементов F, а C_r — из линейных комбинаций с рациональными коэффициентами. Тогда C_r, очевидно, плотно в C и имеет мощность $\leqslant \tau$. В то же время по теореме Вейерштрасса–Стоуна C плотно в $C(X)$. Значит, C_r также плотно в $C(X)$. Теорема доказана.

§ 4. Примеры топологических произведений и следствия из теорем Тихонова. Бикомпактные расширения

4.1. Теорема. *Метрическое произведение* (см. I.3.12) *совпадает с топологическим.*

Доказательство. Пусть (X_i, ρ_i) — последовательность метрических пространств ограниченного диаметра. Покажем сначала, что тождественное отображение $\prod\limits_{i=1}^{\infty}{}^M X_i \to \prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ непрерывно. Для этого согласно I.1.19 надо показать, что для всякой точки $x \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ и всякого $\varepsilon > 0$ множество $p_i^{-1}O(p_i(x), \varepsilon)$ открыто в метрической топологии. Пусть $y \in p_i^{-1}O(p_i(x), \varepsilon)$. Существует $\delta > 0$ такое, что $O(p_i(y), \delta) \subset O(p_i(x), \varepsilon)$. Положим $\delta' = \delta/2^i$ и покажем, что $O(y, \delta') \subset p_i^{-1}O(p_i(x), \varepsilon)$. Пусть $z \in O(y, \delta')$. Из неравенства

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^k}\rho_k(p_k(y), p_k(z))\right]^2} < \delta'$$

следует неравенство

$$\frac{1}{2^i}\rho_i(p_i(y), p_i(z)) < \delta',$$

т. е.

$$\rho_i(z) \in O(p_i(y), 2^i\delta') = O(p_i(y), \delta) \subset O(p_i(x), \varepsilon).$$

Значит, $z \in p_i^{-1}O(p_i(x), \varepsilon)$.

Теперь покажем, что тождественное отображение $\prod_{i=1}^{\infty} X_i \to \prod_{i=1}^{\infty} {}^M X_i$ непрерывно. Возьмем точку $x \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ и положительное число ε. Пусть диаметры X_i ограничены одной константой d. Существует такое n, что $\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{d^2}{2^{2i}} < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}$ и $Ox = \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}O(p_i(x), \delta)$. Пусть $y \in Ox$. Тогда

$$\rho^2(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2i}}\rho_i^2(p_i(x), p_i(y)) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{2i}}\rho_i^2(p_i(x), p_i(y)) +$$
$$+ \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^{2i}}\rho_i^2(p_i(x), p_i(y)) < \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta^2}{2^{2i}} + \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{d^2}{2^{2i}} < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2.$$

Итак, для всякого $\varepsilon > 0$ нашли такую окрестность Ox, что $Ox \subset O(x, \varepsilon)$. Значит, отображение $\prod_{i=1}^{\infty} X_i \to \prod_{i=1}^{\infty} {}^M X_i$ непрерывно и теорема доказана.

4.2. Следствие. *Пусть X_i, $i = 1, 2, \ldots$, — метризуемые пространства. Тогда на X_i существуют такие метрики ρ_i,* *что*

$$\prod_{i=1}^{\infty}{}^{M}(X_i, \rho_i) = \prod_{i=1}^{\infty} X_i.$$

Вытекает из того, что всякое метрическое пространство гомеоморфно пространству диаметра $\leqslant 1$ (если ρ — метрика на X, то $\min\{\rho, 1\}$ — метрика с той же топологией).

4.3. В гильбертовом пространстве H^ω (см. I.3.11) рассмотрим множество Q, состоящее из всех точек, i-я координата которых принадлежит отрезку $[0; 1/2^i]$. Это множество называется *гильбертовым кирпичом.*

4.4. Отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств называется *изометрией*, если $\rho(x, x') = \rho(f(x), f(x'))$ для всех пар $x, x' \in X$. Если существует изометрия из X на Y, то пространства X и Y называются *изометричными.* Из определения метрического произведения вытекает, что гильбертов кирпич изометричен метрическому произведению единичных отрезков. Таким образом, из 4.1 вытекает гомеоморфность гильбертова кирпича и тихоновского куба I^ω.

4.5. Теорема. *Следующие свойства топологического пространства эквивалентны:*

а) X *— регулярное пространство со счетной базой;*

б) X *— вполне регулярное пространство со счетной базой;*

в) X *— нормальное пространство со счетной базой;*

г) X *гомеоморфно подмножеству тихоновского куба* I^ω *веса* ω;

д) X *гомеоморфно подмножеству гильбертова кирпича* Q;

е) X *гомеоморфно сепарабельному метрическому пространству.*

Доказательство. Эквивалентность условий а), б), в) вытекает из I.4.11 и 3.10. Импликация б) $\Rightarrow$ г) следует из второй теоремы Тихонова. Импликация г) $\Rightarrow$ д) обсуждена в 4.4. Всякое подмножество гильбертова кирпича есть метрическое пространство со счетной базой и потому сепарабельно. Наконец, согласно I.3.18 всякое сепарабельное метрическое пространство X имеет счетную базу.

4.6. Из 4.5 и I.4.17 вытекает, что следующие классы пространств совпадают:

а) компакты;

б) бикомпакты со счетной базой;

в) замкнутые подмножества гильбертова кирпича.

4.7. *Канторово совершенное множество.* Возьмем отрезок $I = [0; 1]$ числовой прямой. Назовем его ***сегментом нулевого ранга***. На нем возьмем два сегмента $\Delta_0 = [0; 1/3]$ и $\Delta_1 = [2/3; 1]$. Эти сегменты назовем ***сегментами первого ранга***, а лежащий между ними интервал $\delta = (1/3; 2/3)$ — ***интервалом первого ранга***. С каждым из сегментов Δ_0 и Δ_1 поступим так же, как с сегментом I, а именно на Δ_0 и на Δ_1 возьмем по два сегмента второго ранга: это будут первая и третья трети каждого из сегментов первого ранга, т.е. $\Delta_{00} = [0; 1/9]$, $\Delta_{01} = [2/9; 1/3]$, $\Delta_{10} = [2/3; 7/9]$, $\Delta_{11} = [8/9; 1]$. Между ними лежат соответственно интервалы второго ранга $\delta_0 = (1/9; 2/9)$, т.е. средняя треть сегмента Δ_0 и $\delta_1 = (7/9; 8/9)$ — средняя треть сегмента Δ_1. Это построение продолжаем безгранично: пусть построены 2^n сегментов n-го ранга $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$ (каждый из индексов $i_1, \ldots, i_n$ принимает значения 0 и 1); каждый из сегментов $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$ разделим на три равных по длине куска: два крайних сегмента $\Delta_{i_1 \ldots i_n 0}$ и $\Delta_{i_1 \ldots i_n 1}$ (первая и третья трети сегмента $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$) и лежащий между ними интервал $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ (средняя треть сегмента $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$); это и будут два сегмента и интервал $(n+1)$-го ранга, лежащие на данном сегменте n-го ранга $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$.

Сумму всех сегментов n-го ранга обозначим $\prod_n$. Это замкнутое множество, дополнение к которому на отрезке $[0; 1]$ состоит из всех интервалов ранга $\leqslant n$. Поэтому пересечение $\prod = \bigcap\limits_n \prod_n$ всех множеств $\prod_n$ — замкнутое множество, имеющее своим дополнением сумму всех интервалов $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ всевозможных рангов. Отсюда, в частности, следует, что концы всех интервалов $\delta_{i_1 \ldots i_n}$, а также точки 0 и 1 принадлежат множеству $\prod$, так что интервалы $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ суть все смежные интервалы к замкнутому множеству $\prod$. Множество $\prod$ и называется ***канторовым совершенным множеством***, или ***канторовым дисконтинуумом***.

Обозначим через D подпространство отрезка $[0; 1]$, состоящее из его концов. Оно называется ***простым двоеточием***.

4.8. Теорема. *Канторов дисконтинуум $\prod$ гомеоморфен счетной степени D^ω простого двоеточия D.*

Доказательство. Расстояние между двумя различными сегментами n-го ранга $\geqslant 1/3^n$. Поэтому каждая точка $x \in \prod$ принадлежит единственному сегменту Δ_{i_1} первого ранга, единственному (лежащему на Δ_{i_1}) сегменту второго ранга $\Delta_{i_1 i_2}$, вообще, единственному сегменту n-го ранга $\Delta_{i_1 \dots i_n}$. Другими словами, каждой точке $x \in \prod$ однозначно соответствует последовательность индексов

$$i_1, i_2, \dots, i_n, \text{ каждое } i_n = 0 \text{ или } 1,$$

так, что x принадлежит единственному сегменту $\Delta_{i_1 \dots i_n}$ n-го ранга. Тем самым построено отображение $f\colon \prod \to D^\omega$. Это отображение взаимно однозначно, поскольку при $|x - y| > 1/3^n$ точки x и y принадлежат различным сегментам n-го ранга, и $f(x)$ и $f(y)$ имеют различные n-е координаты. Далее, f отображает $\prod$ на все произведение D^ω, поскольку каждой точке $y = (i_1, i_2, \dots, i_n, \dots) \in D^\omega$ соответствует вложенная последовательность сегментов $\Delta_{i_1 \dots i_n}$, дающих в пересечении единственную точку $x = f^{-1}y$.

Наконец, всевозможные множества $\prod \cap \Delta_{i_1 \dots i_n}$ образуют базу в $\prod$ и $f(\prod \cap \Delta_{i_1 \dots i_n}) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} p_k^{-1}(i_k)$. Поэтому отображение $f^{-1}\colon D^\omega \to \prod$ непрерывно в силу I.1.19. Следовательно, f^{-1} — гомеоморфизм как непрерывное взаимно однозначное отображение бикомпакта D^ω на хаусдорфово пространство $\prod$ (см. I.4.19). Теорема доказана.

4.9. Произведение D^τ при несчетном τ называется (*обобщенным*) *канторовым дисконтинуумом веса* τ. По аналогии с 3.7 нетрудно показать, что вес D^τ равен τ.

4.10. Предложение. *Всякое подпространство вполне регулярного пространства вполне регулярно.*

Доказательство. Пусть $X_0 \subset X$, $x \in X_0$, F_0 — замкнутое в X_0 множество, не содержащее точки x. Существует такое замкнутое в X множество F, что $F_0 = X_0 \cap F$. Тогда $x \notin F$. Существует и непрерывная функция $\psi\colon X \to I$ такая, что $\psi(x) = 0$ и $\psi(F) = 1$. Положив $\varphi = \psi|_{X_0}$, получаем непрерывную функцию $\varphi\colon X_0 \to I$ с $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(F_0) = 1$. Итак, X_0 есть

T_ρ-пространство. Кроме того, аксиома T_0 наследуется при переходе к подпространству. Предложение доказано.

4.11. Теорема. *Следующие свойства топологического пространства эквивалентны для бесконечной мощности* τ:

а) X *вполне регулярное пространство веса* $\leqslant \tau$;

б) X *гомеоморфно подпространству тихоновского куба* I^τ;

в) X *гомеоморфно всюду плотному подпространству бикомпакта веса* $\leqslant \tau$;

г) X *гомеоморфно подпространству нормального пространства веса* $\leqslant \tau$.

Импликация а) $\Rightarrow$ б) составляет содержание второй теоремы Тихонова. Если $f\colon X \to I^\tau$ — гомеоморфное вложение, то X гомеоморфно пространству $f(X)$, всюду плотному в бикомпакте $[f(X)]_{I^\tau}$.

Импликация в) $\Rightarrow$ г) следует из нормальности бикомпакта. Наконец, импликация г) $\Rightarrow$ а) вытекает из 4.10 и полной регулярности нормального пространства.

4.12. Пространство Y, содержащее пространство X в качестве всюду плотного подпространства, называется *расширением* пространства X. Таким образом, теорема 4.11 утверждает, в частности, что всякое вполне регулярное пространство имеет *бикомпактное расширение.* Произвольное бикомпактное расширение пространства X обозначается обычно bX. Отметим при этом, что у произвольного вполне регулярного пространства X существует, как правило, много бикомпактных расширений.

Далее под бикомпактным расширением вполне регулярного пространства понимаем хаусдорфово бикомпактное расширение.

4.13. Предложение. *Произведение вполне регулярных пространств вполне регулярно.*

Вытекает из первой теоремы Тихонова, 1.9 и 4.10, поскольку вполне регулярные пространства суть подмножества бикомпактов.

4.14. Это предложение показывает, что квадрат «стрелки» (см. 3.4) — вполне регулярное, но не нормальное пространство, а всякое бикомпактное расширение квадрата «стрелки» — нормальное, но не наследственно нормальное пространство.

4.15. Предложение. *Во вполне регулярном пространстве X всякий бикомпакт Φ функционально отделим от непересекающегося с ним замкнутого множества F.*

Это утверждение можно доказать, исходя из определения вполне регулярного пространства, но мы воспользуемся второй теоремой Тихонова. Вложим X в I^τ и обозначим Φ_1 замыкание F в I^τ. Тогда непересекающиеся замкнутые подмножества Φ и Φ_1 в нормальном пространстве I^τ разделяются по лемме Урысона непрерывной функцией φ. Ограничение этой функции на X и отделяет Φ от F.

Для дальнейшего нам понадобится

4.16. Предложение. *Пусть $f_i\colon X \to Y$, $i = 1, 2$, — непрерывные отображения в хаусдорфово пространство Y. Тогда множество $\{x \in X\colon f_1(x) = f_2(x)\}$ замкнуто в X.*

Доказательство. Предположим, что для некоторой точки $x \in X$ точки $f_1(x)$ и $f_2(x)$ различны. Возьмем их непересекающиеся окрестности $Of_1(x)$ и $Of_2(x)$. Множество $U = f_1^{-1}(Of_1(x)) \cap \cap f_2^{-1}(Of_2(x))$ — окрестность точки x. Для всякой точки $z \in \in U$ имеем $f_i(z) \in Of_i(x)$ и, значит, $f_1(z) \neq f_2(z)$. Предложение доказано.

4.17. Следствие. *Два непрерывных отображения в хаусдорфово пространство, совпадающие на всюду плотном множестве, совпадают всюду.*

4.18. Непрерывное отображение $f\colon b_1X \to b_2X$ между бикомпактными расширениями одного и того же пространства X назовем *естественным*, если $f(x) = x$ для любой точки $x \in X$. Отметим, что всякое естественное отображение есть отображение «на». Согласно 4.17 может существовать не более одного естественного отображения $f\colon b_1X \to b_2X$. Скажем, что расширение b_1X следует за расширением b_2X, и пишем $b_2X \leqslant b_1X$, если существует естественное отображение $f\colon b_1X \to b_2X$.

Предположим, что $b_2X \leqslant b_1X$ и $b_1X \leqslant b_2X$, т. е. существуют естественные отображения $f_1\colon b_1X \to b_2X$ и $f_2\colon b_2X \to b_1X$. Тогда согласно 4.17 композиция f_2f_1 — тождественное отображение b_1X, а $f_1f_2 = \mathrm{id}_{b_2X}$. Поэтому отображения f_1 и f_2 — взаимно обратные гомеоморфизмы. Следовательно, расширения b_1X и b_2X топологически неразличимы: одно расширение связано с другим единственным естественным отображением, которое является гомеоморфизмом. Такие бикомпактные расширения назовем *эквивалентными* и в дальнейшем не будем их различать, понимая под бикомпактным расширением весь класс эквивалентных бикомпактных расширений. После этой оговорки введенное отношение $\leqslant$ между бикомпактными расширениями превращается в отношение частичного порядка в семействе $\mathfrak{B}_X$ всех бикомпактных расширений вполне регулярного пространства X. Сейчас мы увидим, что $\mathfrak{B}_X$ является множеством.

4.19. *Стоун-чеховское расширение* βX. Всякое расчленяющее семейство Φ непрерывных функций $\varphi\colon X \to I$ определяет вложение X в тихоновский куб $I^{|\Phi|}$ (см. 3.11) и, следовательно, бикомпактное расширение $b_\Phi X = [X]_{I^{|\Phi|}}$. *Стоун-чеховским расширением* вполне регулярного пространства X называется бикомпактное расширение βX, определяемое наибольшим расчленяющим семейством Ξ, состоящим из всех непрерывных функций $\xi\colon X \to I$. Из теоремы 4.20 вытекает, что расширение βX — наибольшее бикомпактное расширение, т. е. оно естественно отображается на любое бикомпактное расширение bX пространства X. Итак, произвольное бикомпактное расширение bX является фактор-пространством расширения βX. Значит, семейство $\mathfrak{B}_X$ всех бикомпактных расширений пространства X — множество (оно вкладывается в множество всех фактор-пространств пространства βX).

4.20. Теорема. *Для произвольного бикомпактного расширения bX вполне регулярного пространства X следующие условия эквивалентны:*

а) *bX естественно гомеоморфно βX;*

б) *всякая непрерывная функция $\varphi\colon X \to I$ может быть продолжена на bX;*

в) *всякое непрерывное отображение $f\colon X \to B$ в бикомпакт может быть продолжено на bX;*

г) *расширение bX обладает естественным отображением на любое бикомпактное расширение пространства X.*

Доказательство. Проверим импликацию а) $\Rightarrow$ б). Заиндексируем отрезки элементами расчленяющего семейства Ξ. Пусть $X \hookrightarrow I^\tau = \prod\{I_\xi\colon \xi \in \Xi\}$ — вложение, определяемое как диагональное произведение функций $\xi\colon X \to I_\xi$. Тогда $p_\varphi|\beta X$, где $p_\varphi\colon I^\tau \to I_\varphi$ — проектирование, и будет искомым продолжением функции φ на βX.

Теперь б) $\Rightarrow$ в). Вложим B в $I^\tau = \prod\{I_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$. Каждая функция $\varphi_\alpha = p_\alpha f\colon X \to I_\alpha$ согласно б) продолжается до функции $\overline{\varphi}_\alpha\colon bX \to I_\alpha$. Тогда $\overline{f} = \Delta\{\overline{\varphi}_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}\colon bX \to I^\tau$ и будет искомым продолжением отображения f. Импликация в) $\Rightarrow$ г) очевидна. Импликация г) $\Rightarrow$ а) проверяется рассуждениями из 4.18, поскольку $\beta X \geqslant bX$ и $bX \geqslant \beta X$. Теорема доказана.

4.21. Только что было установлено, что во множестве бикомпактных расширений вполне регулярного пространства X имеется наибольший элемент. Теперь исследуем вопрос о существовании наименьшего элемента. Если множество $bX \setminus X$, называемое ***наростом*** пространства X в расширении bX, содержит по крайней мере две точки x_1 и x_2, то расширение bX не является наименьшим. В самом деле, расширение bX следует за расширением b_1X, получаемым из bX склеиванием точек x_1 и x_2 в одну. Таким образом, расширение bX может быть наименьшим только в случае, когда нарост $bX \setminus X$ состоит из одной точки. В этом случае пространство X открыто в расширении bX и, следовательно, является локально бикомпактным пространством, т. е. пространством, в котором всякая точка имеет окрестности с бикомпактным замыканием. Итак, локальная бикомпактность пространства X — необходимое условие для того, чтобы у него существовало наименьшее бикомпактное расширение.

4.22. *Александровская компактификация αX.* Пополним локально бикомпактное хаусдорфово пространство X одной точкой ξ так, что X открыто в этом новом пространстве $X \cup \xi$, а окрестности точки ξ образуют множества вида $\xi \cup (X \setminus B)$, где B — бикомпактное подмножество X. Это пространство обозначается αX и называется ***александровской компактификацией*** локально бикомпактного пространства X. Ясно, что αX — бикомпактное расширение пространства X. Легко также видеть, что расширение αX можно получить методом Тихонова при помощи расчленяющего семейства, состоящего из всех функций $\varphi\colon X \to I$ с компактным носителем, т. е. функций, равных нулю вне некоторого бикомпактного множества. Отметим, что частный случай компактификации αX при $X = N$ появился в I.4.14.

Теперь покажем, что расширение αX наименьшее. Поскольку пространство X локально бикомпактно, оно открыто в любом своем бикомпактном расширении bX. Значит, нарост $bX \setminus X$ замкнут. Рассмотрим разбиение пространства X, единственным неодноточечным элементом которого является множество $bX \setminus X$. Фактор-пространство пространства bX по этому разбиению, очевидно, гомеоморфно αX, а соответствующее фактор-отображение и является естественным отображением расширения bX на александровское расширение αX.

§ 5. Операции над покрытиями. Нульмерные и n-мерные пространства

5.1. Скажем, что система подмножеств $\Omega = \{O_\alpha\}$ множества X имеет *кратность* $\leqslant k$, если всякая точка множества X принадлежит не более чем k элементам O_α системы Ω. В частности, системы кратности 1 — это в точности дизъюнктные системы.

5.2. Семейство $v = \{V_\beta\}$ подмножеств множества X *вписано* в семейство $u = \{U_\alpha\}$, если всякий элемент V_β семейства v содержится в некотором элементе U_α семейства u.

5.3. Скажем, что топологическое пространство X имеет *размерность* $\leqslant n$ (пишем $\dim X \leqslant n$), если во всякое конечное открытое покрытие пространства X можно вписать открытое конечное покрытие кратности $\leqslant n+1$.

В частности, пространство X *нульмерно*, если во всякое его конечное открытое покрытие можно вписать (конечное) дизъюнктное открытое покрытие.

5.4. Лемма об ужатии конечных покрытий. *Пусть $\Omega = \{O_1 \dots O_s\}$ — конечное открытое покрытие T_4-пространства X. Тогда в него можно так вписать открытое покрытие $\Omega' = \{O'_1 \dots O'_s\}$, что $[O'_i] \subset O_i$.*

Доказательство. Множество $F_1 = X \setminus \bigcup\limits_{i \geqslant 2} O_i$ замкнуто и O_1 — его окрестность. Поскольку X есть T_4-пространство, существует такая окрестность O'_i множества F_1, что $[O'_1] \subset O_1$.

Предположим, что для всех $i \leqslant k$ построены множества O'_i так, что $[O'_i] \subset O_i$ и система $\Omega_k = \{O'_1, \dots, O'_k, O_{k+1}, \dots, O_s\}$ является покрытием пространства X. Положим $F_{k+1} = X \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} O'_i\right) \cup \cup \left(\bigcup\limits_{i=k+2}^{s} O_i\right)$. Поскольку Ω_k является покрытием, $F_{k+1} \subset O_{k+1}$. Существует такая окрестность O'_{k+1} множества F_{k+1}, что $[O'_{k+1}] \subset \subset O_{k+1}$. Итак, по индукции множества O'_i построены для всех $i = 1, \dots, s$. Лемма доказана.

5.5. Замечания. 1. Лемма об ужатии верна и для точечно-конечного покрытия, т. е. покрытия, имеющего в каждой точке пространства X конечную кратность. Ее доказательство отличается от случая конечного покрытия тем, что применяется трансфинитная индукция вместо математической.

2. Если пространство X нормально, то можно считать, что элемент O'_i вписанного покрытия не пуст, как только не пуст элемент O_i исходного покрытия.

3. Более того, если покрытие Ω конечно, то можно считать, что покрытие Ω' подобно покрытию Ω, т. е. из $O_{i_1} \cap \dots \cap O_{i_k} \neq \neq \varnothing$ всегда следует $O'_{i_1} \cap \dots \cap O'_{i_k} \neq \varnothing$. В самом деле, возьмем точку $x_{i_1 \dots i_k} \in O_{i_1} \cap \dots \cap O_{i_k}$ и окрестность $U_{i_1 \dots i_k}$, с замыканием лежащую в $O_{i_1} \cap \dots \cap O_{i_k}$. После этого добавим множество $U_{i_1 \dots i_k}$ ко всем элементам $O'_{i_1}, \dots, O'_{i_k}$ уже построенного покрытия Ω'. Этот процесс добавления произведем для всех непустых пересечений $O_{i_1} \cap \dots \cap O_{i_k}$. После такого раздутия покрытия Ω' получим покрытие Ω'', подобное покрытию Ω.

5.6. Лемма о раздутии. *Пусть $\varphi = \{F_1, \dots, F_s\}$ — конечная система замкнутых множеств T_4-пространства X. Тогда можно так выбрать окрестности O_i множеств F_i, что система $\Omega = \{O_1, \dots, O_s\}$ и даже система $[\Omega] = \{[O_1], \dots, [O_s]\}$ будут подобны системе φ.*

Доказательство. Если $F_1 \cap \dots \cap F_s \neq \varnothing$, то положим $O_i = X$. В противном случае рассмотрим произвольную подсистему $\varphi_a = \{F_i \colon i \in a\}$ с пустым пересечением $\cap\varphi_a$, где $a \subset \{1, \dots \dots, s\}$. Система $u_a = \{U_i \equiv X \setminus F_i \colon i \in a\}$ — покрытие пространства X. Ужмем это покрытие по лемме 5.4 до покрытия $v_a =$

$= \{V_i^a : i \in a\}$. Теперь положим

$$O_i = \cap\{X \setminus [V_i^a] : i \in a, \cap\varphi_a = \varnothing\}.$$

Легко видеть, что система $\Omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ — искомая.

5.7. Замечание. Лемма о раздутии верна и для конечных систем бикомпактных подмножеств хаусдорфова пространства.

Доказательство, основанное на том, что непересекающиеся бикомпактные подмножества хаусдорфова пространства можно заключить в непересекающиеся окрестности, предоставляется читателю.

5.8. Семейство u подмножеств пространства X называется ***локально конечным***, если у всякой точки $x \in X$ существует окрестность Ox, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов семейства u.

Пространство X называется ***паракомпактным***, если во всякое его открытое покрытие можно вписать открытое локально конечное покрытие.

5.9. Предложение. *Всякое локально конечное семейство u консервативно, т. е.*

$$\cup\{[U] : U \in u\} = [\cup\{U : U \in u\}].$$

Доказать самим.

5.10. Предложение. *Всякое хаусдорфово паракомпактное пространство нормально.*

Доказательство использует предложение 5.9 и аналогично доказательству нормальности бикомпакта. Хаусдорфовы паракомпактные пространства называются ***паракомпактами***.

5.11. Пусть u — открытое покрытие пространства X, а $\Phi = \{\varphi_U : U \in u\}$ — семейство непрерывных функций $\varphi_U : X \to [0; 1]$. Говорят, что семейство Φ — разбиение единицы, подчиненное покрытию u, если

1) $\sum\{\varphi_U : U \in u\} = 1$;
2) $\varphi_U(X \setminus U) = 0$.

5.12. Лемма. *Для произвольного локально конечного открытого покрытия u нормального пространства X существует подчиненное ему разбиение единицы.*

Доказательство. Согласно 5.5 покрытие u можно ужать до замкнутого покрытия $f = \{F_U\colon U \in u\}$. Для каждого $U \in \in u$ существует непрерывная функция $\Psi_U\colon X \to [0;1]$, равная 0 на $X \setminus U$ и отличная от 0 на F_U. Сумма $\Psi = \Sigma\{\Psi_U\colon U \in \in u\}$ непрерывна в силу локальной конечности u и больше нуля всюду, поскольку f — покрытие. Полагая $\varphi_U = \Psi_U/\Psi$, получаем искомое разбиение единицы.

5.13. Пусть v — семейство подмножеств множества X и $x \in \in X$. *Звездой точки* x относительно семейства v называется множество

$$\mathrm{St}_v\, x = \cup\{V \in v\colon x \in V\}.$$

Семейство v называется *звездно вписанным* в семейство u (пишем $v* \succ u$), если семейство $\mathrm{St}\, v = \{\mathrm{St}_v\, x\colon x \in X\}$ вписано в u.

5.14. Предложение. *Во всякое локально конечное открытое покрытие u нормального пространства X можно звездно вписать открытое покрытие.*

Доказательство. По лемме об ужатии (см. 5.5) существует такое открытое покрытие $v = \{V_U\colon U\}$, что $[V_U] \subset U$ для всякого $U \in u$. Для каждой точки $x \in X$ положим $Wx = \cap \cap\{U \in u\colon x \in U\} \setminus \cup\{[V_U]\colon x \notin [V_U]\}$. Согласно 5.9 множество Wx — открытая окрестность точки x. Докажем, что покрытие $w = \{Wx\colon x \in X\}$ — звездно вписано в u. Возьмем произвольно точку $y \in X$. Она лежит в некотором элементе V_U покрытия v. Проверим, что $St_w y \subset U$. Пусть $y \in Wx$. Тогда $Wx \cap V_U \neq \varnothing$ и, следовательно, $x \in [V_U] \subset U$. Отсюда по определению множества Wx получаем, что $Wx \subset U$. Предложение доказано.

5.15. Предложение. *Для того чтобы топологическое пространство X было нульмерно, необходимо и достаточно, чтобы для всякого замкнутого множества $F \subset X$ и всякой его окрестности OF существовала открыто-замкнутая окрестность O_1F, содержащаяся в OF.*

Доказательство. Необходимость. В покрытие $\{OF, X \setminus F\}$ пространства X по условию можно вписать дизъюнктное открытое покрытие $\{O_1, \ldots, O_s\}$. Положим $O_1F = \cup\{O_i\colon O_i \subset \subset OF\}$. Поскольку всякое множество O_i либо содержится в OF, либо не пересекается с F, множество O_1F — окрестность F. Эта окрестность замкнута, так как ее дополнение $\cup\{O_i\colon O_i \cap F = \varnothing\}$ открыто.

Достаточность. Из условия сразу следует, что X есть T_4-пространство. Пусть теперь $\Omega = \{O_1 \ldots O_s\}$ — конечное открытое покрытие пространства X. Применяя лемму 5.4, впишем в него покрытие $\Omega' = O'_1 \ldots O'_s$ так, чтобы $[O'_i] \subset O_i$. Теперь для каждого i возьмем такое открыто-замкнутое множество U_i, что $[O'_i] \subset \subset U_i \subset O_i$. Система $u = \{U_1, \ldots, U_s\}$ — покрытие X, вписанное в Ω. Положив $V_i = U_i \setminus \bigcup\limits_{j<i} U_j$, получаем дизъюнктное покрытие $v = \{V_1, \ldots, V_s\}$, вписанное в u и тем более вписанное в Ω. Предложение доказано.

5.16. Следствие. *Всякое нульмерное T_1-пространство X нормально.*

5.17. Топологическое пространство X называется *индуктивно нульмерным* (пишем $\operatorname{ind} X \leqslant 0$), если оно имеет базу из открыто-замкнутых множеств.

5.18. Предложение. *Бикомпакт X нульмерен тогда и только тогда, когда он индуктивно-нульмерен.*

Доказать самим, применяя предложение 5.15.

5.19. Предложение. *Обобщенный канторов дисконтинуум D^τ нульмерен.*

Вытекает из 5.17, поскольку в $D^\tau = \prod\limits_{\alpha\in A} D_\alpha$ имеется предбаза $\{p_\alpha^{-1}(0), p_\alpha^{-1}(1)\colon \alpha \in A\}$, состоящая из открыто-замкнутых множеств.

5.20. Предложение. *Всякое подпространство индуктивно-нульмерного пространства индуктивно-нульмерно.*

5.21. Предложение. *Всякое индуктивно-нульмерное T_0-пространство X вполне регулярно*

Доказательство. Пусть $x \in X$ и F — замкнутое подмножество X, не содержащее точки x. Существует открыто-замкнутая окрестность U точки x, содержащаяся в $X \setminus F$. Положив

$$\varphi_U(x) = \begin{cases} 0, & x \in U; \\ 1, & x \in X \setminus U, \end{cases}$$

видим, что X есть T_ρ-пространство. Предложение доказано.

5.22. Предложение. *Если пространство X имеет вес τ, то во всякой его базе содержится база мощности τ.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} = \{U\}$ — произвольная база X и пусть $\mathfrak{B}' = \{V\}$ — база мощности τ. Пару элементов (V, V') назовем *канонической*, если существует такой элемент U базы $\mathfrak{B}$, что $V \subset U \subset V'$. Множество всех канонических пар имеет мощность $\leqslant \tau^2 = \tau$. Для каждой канонической пары (V, V') зафиксируем единственный элемент U базы $\mathfrak{B}$ с $V \subset \subset U \subset V'$. Множество зафиксированных элементов обозначим $\mathfrak{B}_0$. Ясно, что $|\mathfrak{B}_0| \leqslant \tau$. Покажем, что $\mathfrak{B}_0$ — база. Пусть $x \in \in X$ и Ox — произвольная окрестность точки x. Поскольку $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ — базы, последовательно найдем такие множества V', U', V, что $x \in V \subset U' \subset V' \subset Ox$ и $V, V' \in \mathfrak{B}'$, $V' \in \mathfrak{B}$. Пара (V, V') каноническая. Следовательно, существует такое множество $U \in \in \mathfrak{B}_0$, что $V \subset U \subset V'$. Итак, $x \in U \subset Ox$, т.е. $\mathfrak{B}_0$ есть база. Поскольку $wX = \tau$ и $|\mathfrak{B}_0| \leqslant \tau$, имеем $|\mathfrak{B}_0| = \tau$. Предложение доказано.

5.23. Теорема. *Для того чтобы X было индуктивно-нульмерным T_0-пространством веса $\leqslant \tau$, необходимо и достаточно, чтобы X было гомеоморфно подпространству обобщенного канторова дисконтинуума D^τ.*

Доказательство. Достаточность вытекает из 5.19 и 5.20. Доказательство необходимости аналогично доказательству второй теоремы Тихонова. Надо согласно 5.22 взять в X базу $\mathfrak{B} = = U$ мощности $\leqslant \tau$, состоящую из открыто-замкнутых множеств. Тогда семейство $\Phi = \{\varphi_U : U \in \mathfrak{B}\}$ (определение φ_U см. в 5.21) — расчленяющее. Диагональное произведение функций φ_U, $U \in \in \mathfrak{B}$, осуществляет гомеоморфное вложение X в D^τ. Теорема доказана.

5.24. Следствие. *Нульмерные бикомпакты веса $\leqslant \tau$ суть замкнутые подмножества D^τ, в частности нульмерные компакты суть замкнутые подмножества канторова совершенного множества.*

5.25. Топологическое пространство X называется *связным*, если в X нет открыто-замкнутых множеств, отличных от пустого множества и всего множества X. Пространство X называется *вполне несвязным*, если всякое его непустое связное подпространство состоит из одной точки.

5.26. Лемма. *Пусть x — произвольная точка бикомпакта X. Тогда квазикомпонента Q_x точки x, т. е. пересечение всех открыто-замкнутых множеств, содержащих точку x, связна.*

Доказательство. Предположим, что множество Q_x несвязно, т. е. его можно представить в виде суммы двух непустых непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2. Поскольку Q_x замкнуто (как пересечение замкнутых множеств), множества F_i замкнуты в X. Пусть OF_1, OF_2 — их непересекающиеся окрестности.

Семейство $\Omega_x = \{U\colon x \in U$ — открыто-замкнуто$\}$ центрировано. Следовательно, некоторый элемент U этого семейства содержится в $OF_1 \cup OF_2$ в силу 5.27. Положим $V_i = U \cap OF_i$. Множества V_1, V_2 — открыты, не пересекаются и в сумме дают замкнутое множество U. Поэтому V_i открыто-замкнуты. Если $x \in F_1$, то $Q_x \setminus V_1 = F_2 \neq \varnothing$, поэтому V_1 не принадлежит Ω_x. Это противоречит тому, что $x \in V_1$ и V_1 открыто-замкнуто. Лемма доказана.

5.27. Лемма. *Если пересечение $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ направленной системы $\{F_\alpha\}$ замкнутых подмножеств бикомпакта X лежит в открытом множестве U, то и некоторый элемент F_α этой системы лежит в U.*

Доказательство. Если утверждение леммы не верно, то система $\{F_\alpha \setminus U\}$ — центрированная. В силу I.4.9 ее пересечение $\bigcap\limits_\alpha (F_\alpha \setminus U) = (\bigcap\limits_\alpha F_\alpha) \setminus U$ непусто, что противоречит включению $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha \subset U$. Лемма доказана.

5.28. Теорема. *Для непустого бикомпакта свойства нульмерности и полной несвязности эквивалентны.*

Доказательство. Если $x \in X$ и Ox — открыто-замкнутая окрестность, то всякое связное множество, содержащее точку x, лежит в Ox и, значит, в пересечении всех Ox, т. е. в квазикомпоненте Q_x. Но во всяком индуктивно-нульмерном пространстве X имеем $Q_x = \{x\}$. Поэтому согласно 5.18 нульмерность бикомпакта влечет его полную несвязность.

Пусть теперь бикомпакт X вполне не связен. Тогда в силу 5.26 всякая точка $x \in X$ является пересечением своих открыто-замкнутых окрестностей. Поэтому согласно 5.27 открыто-замкнутые множества образуют базу бикомпакта X, т. е. он индуктивно-нульмерен, а в силу 5.18 нульмерен. Теорема доказана.

5.29. Теорема. *Компакт X гомеоморфен канторову совершенному множеству тогда и только тогда, когда он нульмерен и не имеет изолированных точек.*

Доказательство. Нульмерность канторова дисконтинуума $\prod$ вытекает из 5.19, отсутствие изолированных точек — из построения (базисные окрестности точек из $\prod$ гомеоморфны $\prod$). Пусть теперь компакт X нульмерен и не имеет изолированных точек. Согласно 5.24 считаем X подмножеством $\prod$. Найдется такая точка $y \in I \setminus \prod$, что множества $X_0 = \{x \in X : x < y\}$ и $X_1 = \{x \in X : y < x\}$ не пусты и имеют диаметры $< 2/3 \operatorname{diam} X$. Каждый из компактов X_0 и X_1 открыто-замкнут в X и, следовательно, не имеет изолированных точек. Повторяя эту процедуру, по индукции можно построить последовательность непустых компактов $X_{i_1 \dots i_n} \subset X, i_k = 0, 1$, так, что

1) $\operatorname{diam} X_{i_1 \dots i_n} < (2/3)^n \operatorname{diam} X$;

2) $X_{i_1 \dots i_n 0} \cap X_{i_1 \dots i_n 1} = \varnothing$;

3) $X_{i_1 \dots i_n 0} \cup X_{i_1 \dots i_n 1} = X_{i_1 \dots i_n}$.

Тогда каждой точке $x \in X$ однозначно соответствует бесконечная последовательность индексов

$$i_1, i_2, \dots, i_n, \dots \qquad i_n = 0, 1,$$

так, что $x \in \bigcap\{X_{i_1 \dots i_n} : n = 1, 2, \dots\}$. Это соответствие, как и в доказательстве теоремы 4.8, является гомеоморфизмом X на D^ω. Применение теоремы 4.8 завершает доказательство.

5.30. Предложение. *Счетное вполне регулярное пространство X индуктивно нульмерно.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ и Ox — произвольная окрестность точки x. Возьмем такую непрерывную функцию $\varphi\colon X \to I$, что $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(X \setminus Ox) = 1$. Поскольку множество $\varphi(X)$ счетно, существует $t \in (0; 1) \setminus \varphi(X)$. Тогда множество $\varphi^{-1}([0; t))$ — открыто-замкнутая окрестность точки x, лежащая в Ox. Предложение доказано.

5.31. Предложение. *Счетное локально компактное* (метризуемое) *пространство X содержит изолированную точку.*

Доказательство. Из локальной компактности X и предложения 5.30 вытекает, что у всякой точки $x \in X$ существует открытая компактная окрестность Ox. Из несчетности канторова дисконтинуума и теоремы 5.29 следует, что компакт Ox содержит изолированную точку x_0. В силу открытости Ox точка x_0 изолирована и во всем пространстве X. Предложение доказано.

5.32. Пусть F — замкнутое подмножество пространства X. Непрерывное отображение $r\colon X \to F$ называется *ретракцией*, если $r(x) = x$ для всякой точки $x \in F$. Множество F называется при этом *ретрактом* пространства X.

5.33. Предложение. *Всякое замкнутое подмножество F нульмерного компакта X является его ретрактом.*

Это утверждение имеет непосредственное доказательство, основанное на том, что X можно считать подмножеством канторова совершенного множества $\prod$. Но мы докажем его с помощью теоремы Майкла о селекции многозначного отображения (см. гл. VI). Рассмотрим многозначное отображение $f\colon X \to F$, задаваемое следующим образом: $f(x) = x$, если $x \in F$, и $f(x) = F$, если $x \notin F$. Отображение f полунепрерывно снизу. В самом деле, если U открыто в F, то $f^{-1}(U) = X \setminus (F \setminus U)$. Существующая в силу теоремы Майкла непрерывная селекция r отображения f — ретракция X на F.

5.34. Теорема. *Если нормальное пространство X n-мерно, то во всякое открытое локально конечное покрытие пространства X можно вписать открытое покрытие кратности $\leqslant n+1$.*

Доказательство проведем для $n = 0$. Значительно более сложное доказательство для общего случая читатель может найти в книге [3], гл. IV, § 11. Итак, пусть $u = \{U_\alpha \colon \alpha \in \mathrm{A}\}$ — произвольное локально конечное покрытие пространства X, занумерованное порядковыми числами. Пусть $f = \{F_\alpha \colon \alpha \in \mathrm{A}\}$ — замкнутое ужатие покрытия u, существующее согласно 5.5. В силу 5.15 для всякого $\alpha \in \mathrm{A}$ существует такое открыто-замкнутое множество V_α, что $F_\alpha \subset V_\alpha \subset U_\alpha$. Теперь положим $W_\alpha = V_\alpha \setminus \cup\{V_\beta \colon \beta < \alpha\}$. Согласно 5.9 множество W_α открыто. Семейство $w = \{W_\alpha \colon \alpha \in \mathrm{A}\}$ —дизъюнктное открытое покрытие, вписанное в u.

5.35. В гл. VI говорится о размерности таких геометрических объектов, как n-мерное евклидово пространство, n-мерный симплекс, n-мерная сфера. Геометрическая размерность этих объектов совпадает с топологической размерностью, определенной в 5.3. Более подробно с этим читатель может познакомиться в книге [3].

§ 6. Диадические бикомпакты

6.1. Каждой точке $x = (i_1, i_2, \dots, i_n, \dots) \in D^\omega$ поставим в соответствие точку $g(x)$ отрезка I, имеющую двоичное разложение $0, i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$, т. е. $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (i_n/2^n)$. Беря композицию гомеоморфизма $f \colon \prod \to D^\omega$ (см. 4.8) и отображение g, получаем *стандартное отображение* h канторова совершенного множества на отрезок. При этом во всякую двоично-иррациональную точку отрезка переходит только одна точка из $\prod$, а в двоично-рациональную неконцевую точку $0, i_1 i_2 \dots i_{n-1} 1000\dots$ — две точки — $(i_1 i_2 \dots i_{n-1} 1000\dots)$ и $(i_1 i_2 \dots i_{n-1} 0111\dots)$ — концы смежного интервала $\delta_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}$ канторова совершенного множества.

Отображение h монотонно: пусть $x, y \in \prod$ и $x < y$. Возьмем наименьшее такое n, что x и y лежат в разных сегментах

$\Delta_{i_1 \dots i_{n-1} 0}$ и $\Delta_{i_1 \dots i_{n-1} 1}$ n-го ранга. Тогда

$$h(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{i_k}{2^k} + \frac{1}{2^n} \leqslant h(y).$$

Поэтому для всякого интервала $U \subset I$ его прообраз $h^{-1}(U)$ является интервалом в $\prod$. Итак, отображение h непрерывно.

6.2. Бикомпакт X, являющийся непрерывным образом обобщенного канторова дисконтинуума D^τ, называется *диадическим бикомпактом*.

Следовательно, отрезок I — диадический бикомпакт.

6.3. Предложение. *Тихоновский куб I^τ является диадическим бикомпактом. Более того, при бесконечном τ куб I^τ есть непрерывный образ D^τ.*

Доказательство. Произведение τ штук отображений $g\colon D^\omega \to I$ дает нам отображение из $(D^\omega)^\tau = D^\tau$ на I^τ.

6.4. Предложение. *Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение бикомпакта X на бикомпакт Y, то $wX \geqslant wY$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ — база бикомпакта X мощности wX. Семейство $\mathfrak{B}'$, состоящее из всех конечных объединений элементов базы $\mathfrak{B}$, также имеет мощность wX. Покажем, что семейство $\mathfrak{B}_0 = \{f^{\#}(U) = Y \setminus f(X \setminus U)\colon U \in \mathfrak{B}'\}$ мощности $\leqslant \tau$ является базой Y. Пусть $y \in Y$ и Oy — произвольная окрестность. Для всякой точки $x \in f^{-1}y$ существует такая окрестность $Ox \in \mathfrak{B}$, что $Ox \subset f^{-1}Oy$. Из покрытия $\{Ox\colon x \in f^{-1}y\}$ бикомпакта $f^{-1}y$ выберем конечное подпокрытие $Ox_1, \dots, Ox_n$. Тогда $U = \bigcup\limits_{i=1} Ox_i \in \mathfrak{B}'$ и $y \in f^{\#}(U) \subset Oy$. Предложение доказано.

Из I.4.15, 4.6 и 6.4 вытекает

6.5. Следствие. *Непрерывный хаусдорфов образ компакта — компакт.*

6.6. Предложение. *Всякий бикомпакт X веса τ является непрерывным образом лежащего в D^τ нульмерного бикомпакта веса τ.*

Доказательство. По второй теореме Тихонова считаем, что $X \subset I^\tau$. Пусть $f\colon D^\tau \to I^\tau$ — непрерывное отображение на I^τ. Тогда бикомпакт X есть непрерывный образ бикомпакта

$f^{-1}X \subset D^\tau$ при отображении $f|_{f^{-1}X}$. Бикомпакт $f^{-1}(X)$ нульмерен согласно 5.24 и имеет вес $\leqslant \tau$. С другой стороны, $wX \leqslant \leqslant wf^{-1}(X)$ согласно 6.4. Итак, $wf^{-1}(X) = \tau$. Предложение доказано.

6.7. Теорема Александрова. *Всякий компакт является непрерывным образом канторова совершенного множества.*

Вытекает из предложений 6.6 и 5.33.

6.8. Очевидно, произведения и непрерывные образы диадических бикомпактов диадичны. Итак, класс диадических бикомпактов есть наименьший класс бикомпактов, замкнутый относительно перехода к произведениям и непрерывным образам и содержащий все компакты. Ниже мы увидим, что не всякий бикомпакт — диадический.

6.9. Кардинальное число τ называется *калибром* топологического пространства X, если для всякого семейства u непустых открытых подмножеств X, имеющего мощность τ, существует подсемейство $v \subset u$ мощности τ с непустым пересечением $\bigcap v$. Заметим, что здесь речь идет об «индексированных» семействах множеств. Это означает, что одинаковые подмножества пространства X могут быть разными элементами семейств u и v. Этим и объясняется оговорка о непустоте элементов семейства u.

Если τ — калибр пространства X, то τ — калибр всякого непрерывного образа пространства X.

6.10. Предложение. *Если X — сепарабельное пространство, то всякое несчетное регулярное число τ является его калибром.*

Доказательство. Пусть Y — счетное плотное в X множество, пусть u — семейство непустых открытых подмножеств X мощности $|u| = \tau$. Для всякой точки $y \in Y$ положим $u_y = \{U \in u\colon y \in U\}$. Ясно, что $u = \bigcup\limits_{y \in Y} u_y$. В силу несчетности и регулярности τ одно из множеств u_y имеет мощность τ. Но $\bigcap u_y \supset \{y\} \neq \varnothing$. Предложение доказано.

6.11. Теорема Шанина. *Если несчетное регулярное число τ является калибром каждого из пространств X_α, $\alpha \in \in \mathrm{A}$, то τ — калибр произведения $\prod\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} X_\alpha$.*

Доказательство. Пусть u — семейство непустых открытых подмножеств X и $|u| = \tau$. Для всякого элемента семейства u возьмем содержащееся в нем непустое базисное множество U, т. е. множество вида $\bigcap\limits_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1} U_{\alpha_i}$, и обозначим семейство всех этих множеств через u_0. Это семейство, индексированное элементами семейства u, имеет мощность τ. Для всякого $U \in u_0$ обозначим через $A(U)$ конечное множество тех индексов из A, от которых зависит множество U, т. е.

$$A(U) = \{\alpha \in \mathrm{A} \colon p_\alpha(U) \neq X_\alpha\}.$$

В силу несчетности и регулярности τ можно считать, переходя, если нужно, к подсемейству семейства u_0, что все множества $U \in u_0$ зависят от одного и того же числа индексов n.

Лемма 1. *Если $v_0 \subset u_0$ — такое подсемейство, что $A(U) \cap \cap A(U') = \varnothing$ для всех пар $U, U' \in v_0$, то $\cap v_0 \neq \varnothing$.*

В самом деле, если $\alpha \notin \cup\{A(U) \colon U \in v_0\}$, то пусть $x_\alpha \in X_\alpha$ — произвольная точка. Если же $\alpha \in \cup\{A(U) \colon U \in v_0\}$, то α лежит в единственном $A(U)$. Выберем $x_\alpha \in p_\alpha(U)$. Тогда $x = (x_\alpha) \in \in \cap\{U \colon U \in v_0\}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если $v_0 \subset u_0$ — такое подсемейство мощности $|v_0| = \tau$, что ни один из индексов $\alpha \in \mathrm{A}$ не принадлежит одновременно τ множествам $A(U)$ при $U \in v_0$, то для всякого $U \in v_0$ существует такое подсемейство $v_1 \subset v_0$ мощности τ, что $A(U) \cap A(V) = \varnothing$ для всех $V \in v_1$.*

В самом деле, пусть $A(U) = \{\alpha_1 \ldots, \alpha_n\}$. Тогда в качестве множества v_1 можно взять $v_0 \setminus (v^1 \cup \ldots \cup v^n)$, где $v^i = \{U \in \in v_0 \colon \alpha_i \in A(U)\}$.

Применяя лемму 2 последовательно τ раз, трансфинитной индукцией доказываем следующее утверждение.

Лемма 3. *Если $v_0 \subset u_0$ — такое подсемейство мощности τ, что ни один из индексов $\alpha \in \mathrm{A}$ не принадлежит одновременно τ множествам $A(U)$ при $U \in v_0$, то существует* *такое подсемейство* $v_1 \subset v_0$ *мощности* τ, *что*

$$A(V) \cap A(V') = \varnothing \text{ для всех пар } V, V' \in v_1.$$

Так же, как и лемма 3, доказывается

Лемма 4. *Пусть* $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ *и* $v_0 \subset u_0$ — *такое подсемейство мощности* τ, *что ни один из индексов* $\alpha \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ *не принадлежит одновременно* τ *множествам* $A(U)$ *при* $U \in v_0$. *Тогда существует такое подсемейство* $v_1 \subset v_0$ *мощности* τ, *что* $A(V) \cap A(V') \subset \mathrm{B}$ *для всех пар* $V, V' \in v_1$.

Приступаем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Нам достаточно найти подсемейство $v_0 \subset u_0$ мощности τ с непустым пересечением. В силу лемм 1 и 3 осталось рассмотреть случай, когда по крайней мере один из индексов $\alpha_1 \in \mathrm{A}$ принадлежит τ множествам $A(U)$. Положим $v_1' = \{U \in u_0 \colon \alpha_1 \in A(U)\}$. Поскольку τ — калибр пространства X_{α_1}, существует такое подсемейство $v_1 \subset v_1'$ мощности τ, что $\cap\{p_{\alpha_1}(U) \colon U \in v_1\} \neq \varnothing$.

Случай 1. Только что описанный процесс продолжается, т. е. существует $\alpha_2 \neq \alpha_1$ и подсемейство $v_2' \subset v_1$ мощности τ так, что $\alpha_2 \in A(U)$ для всех $U \in v_2'$. Тогда существует подсемейство $v_2 \subset v_2'$ мощности τ такое, что $\cap\{p_{\alpha_2}(U) \colon U \in v_2\} \neq \varnothing$ и т. д. В этом случае семейство v_n — искомое, т. е. $\cap v_n \neq \varnothing$. В самом деле, пересечению $\cap v_n$ принадлежит любая точка $x = (x_\alpha)$ с $x_{\alpha_i} \in \cap\{p_{\alpha_i}(U) \colon U \in v_n\}, i = 1, \ldots, n$.

Случай 2. Процесс обрывается на некотором $k < n$, т. е. можно построить индексы $\alpha_1 \ldots, \alpha_k$ и последовательность семейств $v_1 \supset \ldots \supset v_k$ мощности τ так, что $\cap\{p_{\alpha_i}(U) \colon U \in v_i\} \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, k$. Но в то же время никакой из индексов $\alpha \in \mathrm{A} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ не принадлежит τ множествам $A(U)$ при $U \in v_k$. Тогда по лемме 4 существует такое подсемейство $v_0 \subset v_k$ мощности τ, что $A(V) \cap A(V') \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ для всех пар $V, V' \in v_0$. Возьмем $x_{\alpha_i} \in \cap\{p_{\alpha_i}(U) \colon U \in v_0\}$, $i = 1, \ldots, k$. Далее для каждого $U \in v_0$ и $\alpha \in \mathrm{A}(U) \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ возьмем $x_\alpha \in p_\alpha(U)$. Пусть, наконец, x_α — произвольная точка из X_α при $\alpha \notin \cup\{A(U) \colon U \in v_0\}$. Тогда $x = (x_\alpha) \in \cap v_0$. В самом деле, для любого $\beta \in A(U)$, $U \in v_0$, имеем $x_\beta \in p_\beta(U)$. В то же время $U = \cap\{p_{\mathrm{B}}^{-1} p_\beta(U) \colon \beta \in A(U)\} \supset \cap\{p_\beta^{-1} x_\beta \colon \beta \in A(U)\} \ni x$. Теорема доказана.

Из этой теоремы и предложения 6.10 вытекает

6.12. Следствие. *Любое несчетное регулярное число является калибром всякого произведения сепарабельных пространств.*

Соединяя это с 6.9, получаем

6.13. Предложение. *Любое несчетное регулярное число является калибром диадического бикомпакта.*

6.14. Говорят, что пространство X *удовлетворяет условию Суслина*, если всякое дизъюнктное семейство непустых открытых множеств из X не более чем счетно. Ясно, что если ω_1 — калибр пространства X, то X удовлетворяет условию Суслина.

Поэтому из 6.13 вытекает

6.15. Теорема Марчевского–Шпильрайна. *Диадический бикомпакт удовлетворяет условию Суслина.*

В частности, в диадическом бикомпакте не более чем счетно множество изолированных точек. Поэтому αN при несчетном N (см. I.4.14) является примером недиадического бикомпакта.

6.16. Лемма. *Пусть $f\colon X \to Y$ —открытое непрерывное отображение и $Z \subset Y$. Тогда $[f^{-1}(Z)] = f^{-1}([Z])$.*

Доказательство. Включение $[f^{-1}(Z)] \subset f^{-1}([Z])$ вытекает из непрерывности отображения f. Пусть теперь $x \in f^{-1}([Z])$ и Ox — произвольная окрестность. Так как $f(x) \in [Z]$ и f открыто, то $f(Ox) \cap Z \neq \varnothing$, откуда $Ox \cap f^{-1}(Z) \neq \varnothing$. Значит, $x \in [f^{-1}(Z)]$. Лемма доказана.

6.17. Замкнутое множество $F \subset X$ называется *канонически замкнутым*, если $F = [\langle F\rangle]$. Открытое множество $U \subset X$ называется *канонически открытым*, если $U = \langle [U]\rangle$. Канонически замкнутые множества суть дополнения до канонически открытых, и наоборот.

6.18. Предложение. *Если произведение $\prod\{X_\alpha\colon \alpha \in \in \mathrm{A}\}$ удовлетворяет условию Суслина, то всякое канонически замкнутое в нем множество F зависит лишь от счетного числа координат, т. е. $F = p_{\mathrm{B}}^{-1}p_{\mathrm{B}}(F)$ для некоторого счетного $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$.*

Доказательство. Выбираем в $\langle F\rangle$ максимальную дизъюнктную систему $\{U_n\}$ открытых базисных множеств. Каждое U_n зависит от конечного числа координат, поэтому существует такое счетное множество $B \subset A$, что $p_{\mathrm{B}}^{-1}p_{\mathrm{B}}(U) = U$, где $U = \bigcup\limits_n U_n$. Поскольку проектирование произведения на сомножитель — открытое отображение, согласно 6.16 имеем $p_{\mathrm{B}}^{-1}[p_{\mathrm{B}}(U)] = [U]$. Но $[U] = F$ в силу каноничности F. Таким образом, $F = p_{\mathrm{B}}^{-1}p_{\mathrm{B}}(F)$. Предложение доказано.

6.19. Следствие. *Канонически открытые множества в произведениях с условием Суслина зависят от счетного числа координат.*

6.20. Следствие. *Пересечение счетного числа канонических множеств в произведениях с условием Суслина зависит от счетного числа координат.*

6.21. Следствие. *Замкнутое G_δ-множество в D^τ зависит от счетного числа координат.*

6.22. Предложение. *Канонически замкнутое подмножество D^τ является G_δ-множеством.*

Доказательство. Пусть $F = [\langle F\rangle] \subset D^\tau$. Согласно 6.18 существует такое счетное подмножество $B \subset \tau$, что $F = p_{\mathrm{B}}^{-1}p_{\mathrm{B}}(F)$. Множество $p_{\mathrm{B}}(F)$, будучи замкнутым подмножеством метризуемого пространства D^{B}, является пересечением счетного числа открытых множеств $U_i \subset D^{\mathrm{B}}$. Тогда $F = p_{\mathrm{B}}^{-1}p_{\mathrm{B}}(F) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} p_{\mathrm{B}}^{-1}U_i$. Предложение доказано.

6.23. Предложение. *Всякое замкнутое G_δ-подмножество D^τ, в частности всякое канонически замкнутое подмножество, является* диадическим *бикомпактом.*

Доказательство. Согласно 6.21 для замкнутого G_δ-множества $F \subset D^\tau$ существует такое счетное множество $\mathrm{B} \subset \tau$, что $F = p_{\mathrm{B}}^{-1}p_{\mathrm{B}}(F)$. Тогда $F = p_{\mathrm{B}}(F) \times D^{\tau\setminus\mathrm{B}}$ — диадический бикомпакт как произведение двух диадических бикомпактов — компакта $p_{\mathrm{B}}(F)$ и обобщенного канторова дисконтинуума $D^{\tau\setminus\mathrm{B}}$.

6.24. Следствие. *Замкнутые G_δ-подмножества диадических бикомпактов являются диадическими бикомпактами.*

6.25. Говорят, что пространство X *удовлетворяет первой аксиоме счетности*, если у всякой точки $x \in X$ существует *счетная база окрестностей*, т.е. такая система окрестностей $\{O_n x\}$, что во всякой окрестности Ox содержится некоторая окрестность $O_n x$. Все метризуемые пространства удовлетворяют первой аксиоме счетности, но обратное неверно, как показывает пример «стрелки» (см. 3.4), которая неметризуема, поскольку ее квадрат не нормален.

6.26. Предложение. *Произведение $\leqslant \tau$ штук пространств плотности $\leqslant \tau$ имеет плотность $\leqslant \tau$.*

Доказательство. Пусть $X = \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, $|A| \leqslant \tau$ и пусть Y_α — плотные в X_α множества мощности $\leqslant \tau$. Рассмотрим произвольное конечное множество $B \subset A$. Множество $Y_B = \prod\limits_{\alpha \in B} Y_\alpha$ имеет мощность $\leqslant \tau$ и плотно в произведении $\prod\limits_{\alpha \in B} X_\alpha$. Выберем в X множество Z_B мощности $\leqslant \tau$, которое при проектировании p_B в отображается на Y_B (достаточно взять в каждом прообразе $p_B^{-1} y$, $y \in Y_B$ по точке). Пусть теперь Z — объединение множеств Z_B для всех конечных множеств $B \subset A$. Множество Z имеет мощность $\leqslant \tau$. Покажем, что Z плотно в X. Пусть $x \in X$ и Ox — произвольная окрестность. В Ox содержится базисная окрестность точки x вида $p_B^{-1} U$, где U открыто в $\prod\limits_{\alpha \in B} X_\alpha$, а B — конечно. Поскольку $U \cap Y_B \neq \varnothing$, имеем $p_B^{-1} U \cap Z_B \neq \varnothing$. Тем более $Ox \cap Z \neq \varnothing$. Предложение доказано.

Анализ доказательства предложения 6.26 показывает, что в произведении $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ плотно всякое подмножество Z, каждая проекция $p_B(Z)$ которого на конечную грань $\prod\limits_{\alpha \in B} X_\alpha$ плотна в ней.

6.27. Теорема. *Пусть $f\colon \prod\{X_\alpha\colon \alpha \in A\} \to Y$ — непрерывное отображение произведения X сепарабельных пространств X_α в регулярное пространство Y с 1-й аксиомой счетности. Тогда f зависит от счетного числа координат, т.е. существует такое счетное множество $B \subset A$ и такое непрерывное отображение $g\colon \prod\{X_\alpha\colon \alpha \in B\} \to Y$, что $f = g \circ$ $\circ\, p_B$.*

Доказательство. Поскольку Y регулярно, у всякой точки $y \in Y$ существует такая база окрестностей $\{O_n y\}$, что $[O_{n+1} y] \subset$

$\subset O_n y$. Множество $f^{-1}y$ — пересечение счетного числа канонически замкнутых множеств $[f^{-1}O_n y]$ и потому зависит от счетного числа координат $\mathrm{B}_y \subset \mathrm{A}$. Поскольку все счетные грани $p_{\mathrm{B}}(X)$ сепарабельны (см. 6.26), можно по индукции построить растущую последовательность счетных множеств $Z_i \subset X$ так, что $p_{\mathrm{B}_i}(Z_{i+1})$ плотно в $p_{\mathrm{B}_i}(X)$, где $\mathrm{B}_i = \cup\{\mathrm{B}_{f(x)}: x \in Z_i\}$. При этом построение можно начать с любой точки $x \in X$, полагая $Z_0 = \{x\}$.

Множество $\mathrm{B} = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathrm{B}_i$ — искомое. Построим отображение g. Положим $Z_\infty = \cup Z_i$ и $Z = f^{-1}f(Z_\infty)$. Множество $p_{\mathrm{B}}(Z_\infty)$ плотно в $p_{\mathrm{B}}(X)$ согласно 6.26. Покажем, что Z не зависит от $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$, т. е. $p_{\mathrm{B}}^{-1}p_{\mathrm{B}}(Z) = Z$. Пусть $z \in Z$. Существует такая точка $x \in Z_i$, что $z \in f^{-1}f(x)$. Тогда $p_{\mathrm{B}_i}^{-1}p_{\mathrm{B}_i}(z) \subset p_{\mathrm{B}_{f(x)}}^{-1}p_{\mathrm{B}_{f(x)}}(z) \subset f^{-1}f(x) \subset Z$. Тем более $p_{\mathrm{B}}^{-1}p_{\mathrm{B}}(z) \subset Z$. Далее $p_{\mathrm{B}}(Z)$ плотно в $p_{\mathrm{B}}(X)$, так как $p_{\mathrm{B}}(Z) \supset p_{\mathrm{B}}(Z_\infty)$. Следовательно, $Z = p_{\mathrm{B}}^{-1}p_{\mathrm{B}}(Z)$ плотно в X согласно 6.16.

Пусть $x_0 \in X$ — фиксированная точка. Рассмотрим слой $p_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}}^{-1}p_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}}(x_0)$ гомеоморфный $p_{\mathrm{B}}(X)$. Для $z \in p_{\mathrm{B}}(X)$ положим $g_{x_0}(z) = f(p_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}}(x_0), z)$. Отображение g_{x_0} непрерывно как композиция естественного гомеоморфизма $p_{\mathrm{B}}(X)$ на $p_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}}^{-1}p_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}}(x_0)$ и отображения $f|p_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}}^{-1}p_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}}(x_0)$. При $x_1 \neq x_0$ имеем $g_{x_1} = g_{x_0}$ согласно 4.17, поскольку отображения g_{x_i} совпадают на плотном в $p_{\mathrm{B}}(X)$ множестве $p_{\mathrm{B}}(Z)$. Следовательно, $g = g_{x_0}$ не зависит от точки x_0 и $g \circ p_{\mathrm{B}} = f$. Теорема доказана.

6.28. Следствие (теорема Пондишери). *Функция, непрерывная на произведении сепарабельных пространств, зависит от счетного числа координат.*

Другим следствием из 6.27 и 6.5 является

6.29. Теорема. *Диадический бикомпакт с первой аксиомой счетности метризуем.*

6.30. Предложение. *Всякий диадический бикомпакт X веса τ является непрерывным образом D^τ.*

Доказательство. Пусть $X = f(D^{\tau'})$, где $\tau' \geqslant \tau$. По второй теореме Тихонова существует вложение $\iota: X \to I^\tau$. Для $\alpha \in \tau$ положим $\varphi_\alpha = p_\alpha \circ \iota \circ f: D^{\tau'} \to I$. Каждая функция φ_α

согласно 6.28 зависит от счетного числа координат. Значит, все функции φ_α, $\alpha \in \tau$, зависят не более чем от τ координат. Поэтому существует такое множество $B \subset \tau'$ мощности τ и такие функции $\Psi_\alpha \colon D^{\mathrm{B}} \to I$, что $\varphi_\alpha = \Psi_\alpha \circ q_{\mathrm{B}}$ для всех $\alpha \in \tau$, где $q_B \colon D^{\tau'} \to D^{\mathrm{B}}$ — проектирование. Тогда

$$\underset{\alpha\in\tau}{\Delta} \varphi_\alpha = \underset{\alpha\in\tau}{\Delta} \Psi_\alpha \circ q_{\mathrm{B}} = (\underset{\alpha\in\tau}{\Delta} \Psi_\alpha) \circ q_{\mathrm{B}}.$$

Но $\underset{\alpha\in\tau}{\Delta} \varphi_\alpha = \underset{\alpha\in\tau}{\Delta} (p_\alpha \circ \iota) \circ f = \iota \circ f$. Положив $g = \underset{\alpha\in\tau}{\Delta} \Psi_\alpha \colon D^{\mathrm{B}} \to I^\tau$, видим, что X — образ $D^{\mathrm{B}} = D^\tau$ при отображении $\iota^{-1} \circ g$. Предложение доказано.

6.31. Пусть $f \colon D^\tau \to X$ — непрерывное отображение. Скажем, что f-характер точки $x \in X$ не превосходит $\tau'(f_X(x, X) \leqslant \tau')$, если существует такое множество $\mathrm{B}_x \subset \tau$ мощности $|\mathrm{B}_x| \leqslant \tau'$ и такая точка $z_x \in D^{\mathrm{B}_x}$, что $p_{\mathrm{B}_x}^{-1}(z_x) \subset f^{-1}(x)$.

6.32. П р е д л о ж е н и е. *Пусть $f \colon D^\tau \to X$ — непрерывное отображение, $Y \subset X$ и $f_X(x, X) \leqslant \tau'$ для всех $x \in Y$. Тогда $w[Y] \leqslant \tau'$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 6.27. Выберем $x_0 \in Y$ и положим $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}_{x_0}$. Поскольку $wD^{\mathrm{B}_0} \leqslant \tau'$, то $dA \leqslant \tau'$ для всякого $\mathrm{A} \subset D^{\mathrm{B}_0}$. Поэтому в множестве $Y' = \cup\{p_{\mathrm{B}_x}^{-1} z_x \colon x \in Y\}$ можно выбрать такое подмножество Z_0 мощности $\leqslant \tau'$, что $p_{\mathrm{B}_0}(Z_0)$ плотно в $p_{\mathrm{B}_0}(Y')$. Положим $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_0 \cup (\cup\{\mathrm{B}_x \colon x \in f(Z_0)\})$. Множество B_1 имеет мощность $\leqslant \tau'$. В Y' выберем такое подмножество $Z_1 \supset Z_0$ мощности $|Z_1| \leqslant \tau'$, что $p_{\mathrm{B}_1}(Z_1)$ плотно в $p_{\mathrm{B}_1}(Y')$. Имеем $p_{\mathrm{B}_1}^{-1} p_{\mathrm{B}_1}(Z_0) \subset Y'$. И так далее. Положим $\mathrm{B} = \bigcup\limits_i \mathrm{B}_i$ и $Z = \bigcup\limits_i Z_i$. Поскольку $Z \subset Y'$ и $p_{\mathrm{B}_i}(Z_i)$ плотно в $p_{\mathrm{B}_i}(Y')$, то $p_{\mathrm{B}}(Z)$ плотно в $p_{\mathrm{B}}(Y')$.

Выберем произвольно точку $t \in D^{\tau \setminus \mathrm{B}}$ и определим отображение $g \colon D^{\mathrm{B}} \to X$ следующим образом:

$$g(y) = f(y, t) \colon D^{\mathrm{B}} \times D^{\tau\setminus\mathrm{B}} \to X.$$

Тогда $g(D^{\mathrm{B}}) \supset [Y]$. В самом деле, поскольку $p_{\mathrm{B}}(Z)$ плотно в $p_{\mathrm{B}}(Y')$, то $p_{\mathrm{B}}^{-1} p_{\mathrm{B}}(Z)$ плотно в $p_{\mathrm{B}}^{-1} p_{\mathrm{B}}(Y')$. Но $p_{\mathrm{B}}^{-1} p_{\mathrm{B}}(Z) \subset Y'$, поэтому $p_{\mathrm{B}}^{-1} p_{\mathrm{B}}(Z)$ плотно в Y'. Следовательно, $g(p_{\mathrm{B}}(Z)) = f(p_{\mathrm{B}}^{-1} p_{\mathrm{B}}(Z))$ плотно в Y, и, значит, бикомпакт $g(D^B)$ содержит $[Y]$. Поэтому $w[Y] \leqslant \tau'$ согласно 6.4. Предложение доказано.

6.33. Скажем, что *характер точки* $x \in X$ не превосходит τ (пишем $\chi(x, X) \leqslant \tau$), если существует база окрестностей точки x, имеющая мощность $\leqslant \tau$. В частности, пространства с 1-й аксиомой счетности — это те пространства X, для которых $\chi(x, X) \leqslant \omega$ во всех точках $x \in X$.

6.34. Предложение. *Для всякой точки x диадического бикомпакта $X = f(D^\tau)$ имеем*

$$f_\chi(x, X) \leqslant \chi(x, X).$$

Доказательство. Пусть $\Omega_x = \{Ox\}$ — база окрестностей точки x мощности $\chi(x, X) = \sigma$. Тогда $\{x\} = \cap\{[Ox]\colon Ox \in \Omega_x\}$ и, значит, множество $f^{-1}(x)$ является пересечением σ штук канонических множеств $[f^{-1}(Ox)]$, $Ox \in \Omega_x$. Поэтому согласно 6.18 множество $f^{-1}(x)$ зависит не более чем от σ координат, т. е. существует такое множество $\mathrm{B} \subset \tau$ мощности $\leqslant \sigma$, что $f^{-1}(x) = p_{\mathrm{B}}^{-1} p_{\mathrm{B}}(f^{-1}(x))$. Значит, $f_\chi(x, X) \leqslant |\mathrm{B}| \leqslant \sigma = \chi(x, X)$. Предложение доказано.

Из 6.32 и 6.34 вытекает

6.35. Предложение. *Если Y — такое подмножество диадического бикомпакта X, что $\chi(x, X) \leqslant \tau$ для всех $x \in Y$, то $w[Y] \leqslant \tau$.*

6.36. Следствие (теорема Ефимова). *Диадический бикомпакт, в котором всюду плотно множество точек с первой аксиомой счетности, метризуем.*

6.37. Вполне упорядоченная последовательность $\{(F_\alpha, U_\alpha)\colon \alpha < \beta\}$ называется *сильной последовательностью длины* β, если $F_\alpha, U_\alpha \subset D^\tau$, F_α — слой над точкой $x_\alpha \in p_{\mathrm{A}_\alpha}(D^\tau)$, т. е. $F_\alpha = p_{\mathrm{A}_\alpha}^{-1} x_\alpha$, где $|A_\alpha| < \tau$, U_α — слой над точкой $y_\alpha \in p_{\mathrm{B}_\alpha}(D^\tau)$ при конечном B_α. Кроме того, требуется, чтобы

1) $F_\alpha \subset U_\alpha$;

2) $U_\alpha \cap F_{\alpha'} = \varnothing$ для всех $\alpha' < \alpha$.

6.38. Лемма Ефимова. *В канторовом дисконтинууме D^τ регулярного несчетного веса τ не существует сильной последовательности длины τ.*

Доказательство. Предположим, что такая последовательность $\{(F_\alpha, U_\alpha)\}$ существует. Переходя к конфинальной последовательности, можно предположить, что $|B_\alpha| = n$ для всех $\alpha < \tau$. Заметим теперь, что $F_{\alpha'} \cap U_\alpha = \varnothing$ влечет существование такого индекса $\beta \in \mathrm{A}_{\alpha'} \cap \mathrm{B}_\alpha$, что $p_\beta(F_{\alpha'}) \neq p_\beta(U_\alpha)$. Поскольку $|\mathrm{A}_1| < \tau$, существуют такие конфинальное τ подмножество $C_1 \subset \subset \tau$ и индекс β_1, что

1) $\beta_1 \in \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}_\alpha$ для всех $\alpha \in C_1$;

2) $p_{\beta_1}(F_1) \neq p_{\beta_1}(U_\alpha)$ для всех $\alpha \in C_1$.

Это означает, что $p_{\beta_1}(U_\alpha) = \varepsilon_1$ не зависит от $\alpha \in C_1$. Пусть $\alpha_2 = \min C_1$. Как и раньше, существует такое конфинальное C_1 подмножество C_2 и такой индекс β_2, что

1′) $\beta_2 \in \mathrm{A}_{\alpha_2} \cap \mathrm{B}_\alpha$ для всех $\alpha \in C_2$;

2′) $p_{\beta_2}(F_{\alpha_2}) \neq p_{\beta_2}(U_\alpha)$ для всех $\alpha \in C_2$.

Поскольку $F_\alpha \subset U_\alpha$, при $\beta \in \mathrm{B}_\alpha$ имеем $p_\beta(F_\alpha) = p_\beta(U_\alpha)$. Поэтому $\beta_2 \neq \beta_1$, так как в противном случае при $\alpha \in C_2$ получим

$$p_{\beta_2}(F_{\alpha_2}) = p_{\beta_1}(F_{\alpha_2}) = p_{\beta_1}(U_{\alpha_2}) = p_{\beta_1}(U_\alpha) = p_{\beta_2}(U_\alpha).$$

Итак, для всех $\alpha \in C_2$ имеем

$$p_{\beta_1}(U_\alpha) = \varepsilon_1, \quad p_{\beta_2}(U_\alpha) = \varepsilon_2.$$

Процесс построения множеств C_i и индексов β_i продолжается. Для множества C_n будем иметь $\mathrm{B}_\alpha = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ для всех $\alpha \in C_n$ и $p_{\beta_i} U_\alpha = \varepsilon_i$, т. е. $U_\alpha = U_{\alpha'}$ при $\alpha, \alpha' \in C_n$. Тогда при $\alpha' < \alpha$ имеем $F_{\alpha'} \subset U_{\alpha'} = U_\alpha$. Это противоречит условию 2) из 6.37. Лемма доказана.

6.39. Предложение. *В диадическом бикомпакте X несчетного регулярного веса τ существует такое непустое открытое подмножество U, что $f_\chi(x, X) = \tau$ для всякой точки $x \in U$.*

Доказательство. Согласно 6.30 можно считать, что $X = f(D^\tau)$. Предположим, что множество $Y = \{x \in X : f_\chi(x, X) < \tau\}$ всюду плотно в X. Поскольку $wY \leqslant \tau$, в Y существует плотное подмножество Z мощности $\leqslant \tau$. Занумеруем точки множества Z порядковыми числами $\alpha < \tau$. Никакой отрезок $Z_\alpha = \{z_{\alpha'} : \alpha' < \alpha\}$ множества Z не плотен в X, поскольку в противном случае по предложению 6.32 имели бы $wX = w[Z_\alpha] = \sup\limits_{x \in Z_\alpha} \chi(x, X) < \tau$ (последнее неравенство следует из регулярности τ).

Теперь в D^τ в противоречии с 6.38 можно построить сильную последовательность длины τ. В множестве Z берется такая подпоследовательность $\{z_{\beta_\alpha} : \alpha < \tau\}$, что $z_{\beta_\alpha} \notin [\bigcup\limits_{\alpha'<\alpha} Z_{\beta_{\alpha'}}]$.

В качестве множества U_α берется произвольная базисная окрестность некоторой точки $x_\alpha \in f^{-1}(z_{\beta_\alpha})$ с единственным условием $f(U_\alpha) \not\ni z_{\beta_{\alpha'}}$ при $\alpha' < \alpha$. Множество $f^{-1}(z_{\beta_\alpha})$ зависит от $\chi(z_{\beta_\alpha}, X) < \tau$ координат. Поэтому существует такое множество $\mathrm{A}'_\alpha \subset \tau$ мощности $|\mathrm{A}'_\alpha| < \tau$, что $f^{-1}(z_{\beta_\alpha}) = p^{-1}_{\mathrm{A}'_\alpha} p_{\mathrm{A}'_\alpha}(f^{-1}(z_{\beta_\alpha}))$. Остается положить $\mathrm{A}_\alpha = \mathrm{A}'_\alpha \cup \mathrm{B}_\alpha$ и $F_\alpha = p^{-1}_{\mathrm{A}_\alpha} p_{\mathrm{A}_\alpha}(x_\alpha)$. Предложение доказано.

Поскольку $\chi(x, X) \leqslant wX$, то из 6.34 и 6.39 вытекает

6.40. Теорема. *В диадическом бикомпакте X несчетного регулярного веса τ существует такое непустое открытое подмножество U, что $\chi(x, X) = \tau$ для всех $x \in U$.*

6.41. Теорема Глисона. *Всякая непрерывная функция φ, определенная на открытом подмножестве U произведения $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ сепарабельных пространств X_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, зависит лишь от счетного числа координат.*

Доказательство. Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ возьмем максимальную дизъюнктную систему v_i таких базисных открытых подмножеств $V \subset U$, что колебание функции φ на множестве $V \in v_i$ не превосходит $1/i$. Каждое множество $V_i = \cup v_i$ всюду плотно в U в силу максимальности системы v_i. Каждое множество $V \in v_i$ зависит от конечного числа координат, а всякое семейство v_i счетно, поскольку в силу 6.12 и 6.14 произведение $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ удовлетворяет условию Суслина. Поэтому существует такое счетное множество $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, что $p_\mathrm{B}^{-1} p_\mathrm{B}(V) = V$ для всех $V \in v_i$, $i = 1, 2, \ldots$

Осталось показать, что функция φ не зависит ни от какой координаты $\alpha \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$. Пусть $x, y \in U$ и $p_{\mathrm{A}\setminus\{\alpha\}}(x) = p_{\mathrm{A}\setminus\{\alpha\}}(y) = t$. Предположим, что $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Существуют такое i и такие окрестности Ox и Oy, что $|\varphi(z) - \varphi(z')| > 1/i$ для всех $z \in Ox$, $z' \in Oy$. Множество V_i всюду плотно в U, значит, $p_{\mathrm{A}\setminus\{\alpha\}}(V_i)$ плотно в $p_{\mathrm{A}\setminus\{\alpha\}}(U) \ni t$. Поэтому в окрестности $p_{\mathrm{A}\setminus\{\alpha\}}(Ox) \cap p_{\mathrm{A}\setminus\{\alpha\}}(Oy)$ точки t найдется точка $s \in p_{\mathrm{A}\setminus\{\alpha\}}(V_i)$. Возьмем такие точки $z \in Ox$, $z' \in Oy$, что $p_{\mathrm{A}\setminus\{\alpha\}}(z) = p_{\mathrm{A}\setminus\{\alpha\}}(z') = s$. Тогда $s \in p_{\mathrm{A}\setminus\{\alpha\}}(V)$ для некоторого $V \in v_i$. Значит, $z, z' \in \in p^{-1}_{\mathrm{A}\setminus\{\alpha\}} p_{\mathrm{A}\setminus\{\alpha\}}(V) = V$ (последнее равенство вытекает из равенства $p_{\mathrm{B}}^{-1} p_{\mathrm{B}}(V) = V$). Поэтому $|\varphi(z) - \varphi(z')| < 1/i$, что противоречит выбору окрестностей Ox и Oy. Теорема доказана.

6.42. Следствие. *Всякая непрерывная функция на открытом подмножестве D^τ зависит от счетного числа координат.*

6.43. Предложение. *Всякая функция φ, непрерывная на $D^\tau \setminus \{x\}$ при несчетном τ, допускает непрерывное продолжение на D^τ.*

В самом деле, согласно 6.42 существует такое счетное множество $\mathrm{B} \subset \tau$ и такая непрерывная функция ψ на $p_{\mathrm{B}}(D^\tau \setminus \{x\})$, что $\varphi = \psi \circ p_{\mathrm{B}}$. Но в силу несчетности τ, $p_{\mathrm{B}}(D^\tau \setminus \{x\}) = p_{\mathrm{B}}(D^\tau)$. Поэтому функция $\psi \circ p_{\mathrm{B}}$ определена на всем D^τ и является искомым продолжением.

6.44. Предложение. *Если $dX \leqslant \tau$, то $d(X^{2^\tau}) \leqslant \tau$.*

Доказательство. Зафиксируем в X плотное множество Y мощности $\leqslant \tau$. Отождествим множество индексов 2^τ с дисконтинуумом D^τ. Обозначим Z множество всех локально постоянных отображений из D^τ в Y. Это множество плотно в X^{2^τ}. В самом деле, пусть $U = \bigcap\limits_{i=1}^{s} p^{-1}_{\alpha_i} U_i$ — произвольное базисное открытое подмножество произведения X^{2^τ}. Выберем в каждом U_i по точке y_i, лежащей в Y. Тогда всякое отображение из D^τ в Y, принимающее в точках α_i значения y_i, лежит в U. Но среди таких отображений имеются и отображения из Z, поскольку отображение, заданное на конечном подмножестве индуктивно-нормального пространства, очевидно, можно продолжить до локально постоянного отображения.

Теперь покажем, что $|Z| \leqslant \tau$. Каждое локально постоянное отображение бикомпакта принимает конечное множество значений. Поэтому каждое отображение из Z определяет конечное дизъюнктное открытое покрытие D^τ. При этом одно и то же покрытие $u = \{U_1, \ldots, U_s\}$ определяется $|Y|^s \leqslant \tau$ отображениями. В то же время существует всего τ дизъюнктных открытых покрытий D^τ. В самом деле, в каждое такое покрытие можно вписать конечное покрытие $v = \{V_1, \ldots, V_k\}$ элементами фиксированной базы D^τ мощности τ. При этом покрытие v можно вписать лишь в конечное число $< 2^{2^k}$ дизъюнктных покрытий. Предложение доказано.

6.45. Следствие. *При* $\tau \leqslant \mathfrak{c}$ *дисконтинуум* D^τ *сепарабелен.*

Глава III
ОБРАТНЫЕ СПЕКТРЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

§ 1. Определение и элементарные свойства обратных спектров

1.1. Категория $\mathscr{C} = (\mathscr{O}, \mathfrak{M})$ (см. II.1.4) называется *малой*, если семейство $\mathscr{O}$ ее объектов и всякое семейство $[X, Y]$ — множества.

1.2. Если $\mathscr{C} = (\mathscr{O}, \mathfrak{M})$ — категория, то на семействе $\mathscr{O}$ ее объектов имеется естественный *предпорядок*, т. е. бинарное отношение, которое рефлексивно и транзитивно. А именно:

$$X \leqslant Y \Leftrightarrow [Y, X] \neq \varnothing.$$

1.3. Малая категория $\mathscr{C} = (\mathscr{O}, \mathfrak{M})$ называется *обратным спектром*, если:

а) предпорядок на множестве $\mathscr{O}$ является частичным порядком;

б) частично упорядоченное множество $\mathscr{O}$ *направлено вверх*, т. е. для любых двух объектов $X, Y \in \mathscr{O}$ существует такой объект $Z \in \mathscr{O}$, что $X \leqslant Z$ и $Y \leqslant Z$;

в) множество $[X, Y]$ содержит не более одного элемента.

1.4. Если категория $\mathscr{C} = (\mathscr{O}, \mathfrak{M})$ — обратный спектр, то ее объекты называются *элементами*, а морфизмы — *проекциями* спектра $\mathscr{C}$.

Если $X, Y \in \mathscr{O}$ и $X \leqslant Y$, то в силу 1.3.в) существует единственная проекция из Y в X, которую обозначаем π_X^Y, иногда ρ_X^Y или ω_X^Y. Поскольку обратный спектр — категория, то при $X \leqslant Y \leqslant Z$ имеем $\pi_X^Z = \pi_X^Y \circ \pi_Y^Z$.

Часто более удобным оказывается обозначать элементы спектра одной буквой, например X, индексированной элементами α

некоторого частично упорядоченного множества. При этом проекции из X_α в $X_{\alpha'}$ обозначаются $\pi^\alpha_{\alpha'}$. Наконец, сам спектр обозначается

$$S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \mathfrak{A}\}.$$

При этом предполагается, что $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$ и $\beta \leqslant \alpha$.

Ниже обратные спектры называем просто *спектрами*.

1.5. Пусть спектр $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \mathfrak{A}\}$ — *подкатегория* некоторой категории $\mathscr{A}$, т. е. все элементы X_α спектра S являются объектами категории $\mathscr{A}$, а проекции π^α_β — ее морфизмами. Тогда объект $X \in \mathscr{A}$ и семейство морфизмов $\pi_\alpha \colon X \to X_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, называется *пределом спектра* S в категории $\mathscr{A}$, если

$$\pi^\alpha_\beta \circ \pi_\alpha = \pi_\beta \text{ для всех } \alpha, \beta \in \mathfrak{A}, \beta \leqslant \alpha,$$

и для любого другого объекта $Y \in \mathscr{A}$ и семейства морфизмов $f_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ со свойством

$$\pi^\alpha_\beta \circ f_\alpha = f_\beta$$

существует такой единственный морфизм $f \colon Y \to X$, что $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Обозначается этот предел $\lim\limits_{\mathscr{A}} S$ или $\lim S$. Объект X при этом называется *пределом спектра* S, а морфизмы π_α — *сквозными проекциями* спектра S.

1.6. Единственность предела спектра доказывается так же, как и единственность произведения (см. II.1.7). Предел спектра так же, как и произведение, *существует не всегда.*

В самом деле, пусть $\mathscr{A}$ — категория всех непустых бикомпактных пространств и всех их непрерывных отображений. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное множество, снабженное минимальной топологией, и пусть X_n — подпространство X, состоящее из всех точек x_i при $i \geqslant n$. Все пространства X_n бикомпактны и непусты. Обозначим $\pi^i_j \colon X_i \to X_j$ — тождественное вложение X_i в X_j при $i \geqslant j$. Тогда система $S = \{X_i, \pi^i_j\}$ — спектр в $\mathscr{A}$. Предположим, что существует предел $\{\lim S, \pi_i\}$ этого спектра в $\mathscr{A}$. Возьмем в непустом бикомпактном пространстве

$\lim S$ произвольную точку x. Тогда $\pi_1(x) = x_k \in X_1$, $\pi_{k+1}(x) = x_l \in X_{k+1}$. Далее, по определению предела спектра имеем

$$\pi_1(x) = (\pi_1^{k+1} \circ \pi_{k+1})(x),$$

т. е. $x_k = \pi_1^{k+1}(x_l)$. Но все отображения π_j^i тождественны, значит, $\pi_1^{k+1}(x_l) = x_l$. В то же время $l \geqslant k+1$, поскольку $x_l \in X_{k+1}$. Это противоречие показывает, что не существует предела спектра S в категории $\mathscr{A}$.

1.7. Далее рассматриваем лишь *топологические спектры*, т. е. спектры S, элементы которых суть топологические пространства, а проекции — непрерывные отображения. Под пределом топологического спектра всегда понимаем предел в категории Top всех топологических пространств и всех непрерывных отображений.

1.8. Теорема. *Предел топологического спектра S существует всегда.*

Доказательство. Пусть $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \mathfrak{A}\}$. Построим пространство X и проекции $\pi_\alpha \colon X \to X_\alpha$, образующие предел. Точку $x \in \prod\{X_\alpha \colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$ назовем *нитью спектра* S, если при $\beta \leqslant \alpha$ имеем $p_\beta(x) = \pi_\beta^\alpha p_\alpha(x)$. Подпространство произведения $\prod\limits_\alpha X_\alpha$, состоящее из всех нитей спектра S, обозначим X. Далее положим $\pi_\alpha = p_\alpha | X$.

Пусть теперь пространство Y и отображения $f_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ таковы, что $f_\beta = \pi_\beta^\alpha f_\alpha$ при $\beta \leqslant \alpha$. Обозначим f диагональное произведение отображений f_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ (см. II.1.11). Тогда $f_\alpha = p_\alpha f$. Если $Y = \varnothing$, то ясно, что $f_\alpha = \pi_\alpha f$. Пусть теперь $Y \neq \varnothing$ и $y \in Y$ — произвольная точка. Тогда $\pi_\beta^\alpha p_\alpha f(y) = \pi_\beta^\alpha f_\alpha(y) = f_\beta(y) = p_\beta f(y)$, т. е. $f(y)$ является нитью спектра S. Таким образом, f есть отображение из Y в X, а из $f_\alpha = p_\alpha f$ и $\pi_\alpha = p_\alpha | X$ вытекает, что $f_\alpha = \pi_\alpha f$. Наконец, единственность отображения $f = Y \to X$ со свойством $f_\alpha = \pi_\alpha f$ вытекает из того, что $f_\alpha = \pi_\alpha f = p_\alpha f$, откуда f необходимо совпадает с диагональным произведением отображений f_α. Теорема доказана.

1.9. Предложение. *Базу в пределе* $\lim S$ *спектра* $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \mathfrak{A}\}$ *образуют множества вида* $\pi_\alpha^{-1} U$, *где* U *открыто в* $X_\alpha \in S$.

Доказательство. Пусть $x \in \lim S \subset \prod\limits_{\alpha} X_\alpha$ и Ox — произвольная окрестность точки x. По определению топологии произведения существуют такие индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и такие открытые множества $U_i \subset X_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, s$, что $x \in \lim S \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{s} p_{\alpha_i}^{-1} U_i) \subset$ $\subset Ox$. Поскольку множество $\mathfrak{A}$ направлено вверх, существует такое $\alpha \in \mathfrak{A}$, что $\alpha_i \leqslant \alpha$ для всех $i = 1, \ldots, s$. Положим $U =$ $= \bigcap\limits_{i=1}^{s} (\pi_{\alpha_i}^{\alpha})^{-1} U_i$. Множество U открыто в X_α. Далее, поскольку x — нить спектра S, то $p_{\alpha_i}(x) = \pi_{\alpha_i}^{\alpha} p_\alpha(x)$. Поэтому $p_\alpha(x) \in U$, т.е. $x \in p_\alpha^{-1} U$, и, значит, $x \in \lim S \cap p_\alpha^{-1} U = \pi_\alpha^{-1} U$. Наконец, $\pi_\alpha^{-1} U = \bigcap\limits_{i=1}^{s} \pi_\alpha^{-1} (\pi_{\alpha_i}^{\alpha})^{-1} U_i = \bigcap\limits_{i=1}^{s} \pi_{\alpha_i}^{-1} U_i = \lim S \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{s} p_{\alpha_i}^{-1} U) \subset Ox$. Предложение доказано.

1.10. Предложение. *Если X есть предел спектра $S =$ $= \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \mathfrak{A}\}$, то $wX \leqslant \max\{\sup\limits_{\alpha} wX_\alpha, |\mathfrak{A}|\}$.*

Вытекает, как из 1.9, так и из II.3.5 и II.3.6.

1.11. Предложение. *Предел спектра из T_i-пространств, $i = 0, 1, 2, 3, \rho$, есть T_i-пространство. Предел спектра из (вполне) регулярных пространств — (вполне) регулярное пространство.*

Вытекает из 1.8, поскольку вышеперечисленные свойства сохраняются как при произведениях, так и при переходе к подпространствам.

1.12. Предложение. *Предел спектра из хаусдорфовых пространств X_α замкнут в произведении $\prod\limits_{\alpha} X_\alpha$.*

Доказательство. Из 1.8 и определения нитей спектра $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \mathfrak{A}\}$ следует, что

$$\lim S = \cap\{X^{\beta\alpha} \colon \alpha, \beta \in \mathfrak{A}, \beta \leqslant \alpha\}, \tag{1}$$

где $X^{\beta\alpha} = \{x \in \prod X_{\alpha'} \colon p_\beta(x) = \pi_\beta^\alpha p_\alpha(x)\}$. Но каждое из множеств $X^{\beta\alpha}$ замкнуто в $\prod X_{\alpha'}$ согласно II.4.16. Предложение доказано.

Из 1.11, 1.12 и первой теоремы Тихонова вытекает

1.13. Предложение. *Предел спектра из бикомпактов является бикомпактом.*

1.14. Но в отличие от первой теоремы Тихонова предел спектра из бикомпактных пространств может быть не бикомпактен. Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ — два непересекающихся счетных множества. На их объединении Z определим топологическое пространство следующим образом: открытыми множествами являются Z и все подмножества из Y. Положим $Z_i = Y \cup X_i$ (см. 1.6) и $\pi^i_j \colon Z_i \to Z_j$, равным тождественному вложению при $j \leqslant i$. Пространства Z_i бикомпактны, но предел спектра $S = \{Z_i, \pi^i_j\}$, как легко видеть, гомеоморфен бесконечному дискретному подпространству Y пространства Z.

1.15. Теорема Куроша. *Предел спектра S из непустых бикомпактов X_α непуст.*

Доказательство. Положим $\prod_\alpha = \bigcap\limits_{\beta \leqslant \alpha} X^{\beta\alpha}$ (см. 1.12). Множество $\prod_\alpha$ замкнуто в произведении $\prod X_{\alpha'}$. Далее, $\prod_\alpha$ непусто: фиксируем $x_\alpha \in X_\alpha$, полагаем $x_\beta = \pi^\alpha_\beta(x_\alpha)$ при $\beta < \alpha$. Пусть наконец x_γ выбрано в X_γ произвольно при $\gamma \not\leqslant \alpha$. Тогда точка $x \in \prod X_{\alpha'}$ с только что зафиксированными координатами, очевидно, принадлежит $\prod_\alpha$. Наконец, при $\alpha, \beta \leqslant \gamma$ имеем $\prod_\gamma \subset \subset \prod_\alpha \cap \prod_\beta$. Таким образом, $\{\prod_\alpha\}$ — центрированная система непустых замкнутых подмножеств бикомпакта $\prod X_{\alpha'}$. Непустой бикомпакт $\bigcap\limits_\alpha \prod_\alpha$ согласно (1) из 1.12 совпадает с $\lim S$. Теорема доказана.

Как мы видели в 1.6, предел спектра из непустых бикомпактных пространств может быть пуст.

1.16. Предложение. *Если множество F замкнуто в пределе $\lim S$ спектра $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \mathfrak{A}\}$, то $F = \bigcap\limits_\alpha \pi_\alpha^{-1}\pi_\alpha(F)$.*

Доказательство. Включение $\subset$ очевидно. Пусть теперь $x \in \lim S \setminus F$. Согласно 1.9 существуют такие $\alpha \in \mathfrak{A}$ и открытое множество $U \subset X_\alpha$, что $x \in \pi_\alpha^{-1} U \subset \lim S \setminus F$. Значит, $x \notin \pi_\alpha^{-1}\pi_\alpha(F)$ и тем более $x \notin \bigcap\limits_\alpha \pi_\alpha^{-1}\pi_\alpha(F)$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Предложение доказано.

Ниже увидим (1.28), что условие замкнутости множества F здесь существенно.

1.17. Пусть $S_1 = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}, \mathfrak{A}_1\}$ и $S_2 = \{Y_\beta, \rho^\beta_{\beta'}, \mathfrak{A}_2\}$ — два спектра. Морфизмом спектра S_1 в спектр S_2 называется пара

(μ, Φ), где $\mu\colon \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1$ — отображение, а $\Phi = \{f_\beta\colon X_{\mu(\beta)} \to \to Y_\beta, \beta \in \mathfrak{A}_2\}$ — такое множество отображений, что при $\beta \geqslant \beta'$ существует $\alpha \geqslant \mu(\beta), \mu(\beta')$ со свойством

$$f_{\beta'} \circ \pi^\alpha_{\mu(\beta')} = \rho^\beta_{\beta'} \circ f_\beta \circ \pi^\alpha_{\mu(\beta)}. \tag{2}$$

Иногда морфизмом спектра S_1 в спектр S_2 называют само семейство отображений Φ, предполагая отображение $\mu\colon \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1$ уже заданным.

1.18. Если проекции спектра S_1 являются эпиморфизмами, то из (2) вытекает равенство

$$f_{\beta'} \circ \pi^{\mu(\beta)}_{\mu(\beta')} = \rho^\beta_{\beta'} \circ f_\beta \text{ при } \mu(\beta) \geqslant \mu(\beta').$$

В самом деле, для $x \in X_{\mu(\beta)}$ существует такое $y \in X_\alpha$, что $\pi^\alpha_{\mu(\beta)}(y) = x$. Тогда, подставив y в равенство (2) и заменив $\pi^\alpha_{\mu(\beta')}$ на $\pi^{\mu(\beta)}_{\mu(\beta')} \circ \pi^\alpha_{\mu(\beta)}$, получим требуемое нам равенство в точке x.

1.19. Предложение. *Пусть даны три спектра $S_1 = \{X_\alpha, {}^1\pi^\alpha_{\alpha'}, \mathfrak{A}_1\}$, $S_2 = \{Y_\beta, {}^2\pi^\beta_{\beta'}, \mathfrak{A}_2\}$, $S_3 = \{Z_\gamma, {}^3\pi^\gamma_{\gamma'}, \mathfrak{A}_3\}$ и морфизмы $(\mu_1, \Phi_1)\colon S_1 \to S_2$ и $(\mu_2, \Phi_2)\colon S_2 \to S_3$, где $\Phi_1 = \{{}^1f_\beta\colon X_{\mu_1(\beta)} \to Y_\beta, \beta \in \mathfrak{A}_2\}$ и $\Phi_2 = \{{}^2f_\gamma\colon Y_{\mu_2(\gamma)} \to Z_\gamma, \gamma \in \mathfrak{A}_3\}$. Тогда пара $(\mu_1 \circ \mu_2, \Phi_2 \circ \Phi_1)$, где $\Phi_2 \circ \Phi_1 = \{{}^2f_\gamma \circ {}^1f_{\mu_2(\gamma)}\colon X_{\mu_1\mu_2(\gamma)} \to Z_\gamma, \gamma \in \mathfrak{A}_3\}$, является морфизмом спектра S_1 в спектр S_3.*

Доказательство. Пусть $\gamma \geqslant \gamma'$. Поскольку (μ_2, Φ_2) — морфизм, существует $\beta \geqslant \mu_2(\gamma), \mu_2(\gamma')$ со свойством

$${}^2f_{\gamma'} \circ {}^2\pi^\beta_{\mu_2(\gamma')} = {}^3\pi^\gamma_{\gamma'} \circ {}^2f_\gamma \circ {}^2\pi^\beta_{\mu_2(\gamma)}. \tag{3}$$

Теперь воспользуемся определением морфизма (μ_1, Φ_1) для пар $\beta \geqslant \mu_2(\gamma)$ и $\beta \geqslant \mu_2(\gamma')$. Для первой пары существует $\alpha_1 \geqslant \mu_1(\beta)$, $\mu_1\mu_2(\gamma)$ со свойством

$${}^1f_{\mu_2(\gamma)} \circ {}^1\pi^{\alpha_1}_{\mu_1\mu_2(\gamma)} = {}^2\pi^\beta_{\mu_2(\gamma)} \circ {}^1f_\beta \circ {}^1\pi^{\alpha_1}_{\mu_1(\beta)}. \tag{4}$$

Для второй пары существует $\alpha_2 \geqslant \mu_1(\beta)$, $\mu_1\mu_2(\gamma')$ со свойством

$${}^1f_{\mu_2(\gamma')} \circ {}^1\pi^{\alpha_2}_{\mu_1\mu_2(\gamma')} = {}^2\pi^\beta_{\mu_2(\gamma')} \circ {}^1f_\beta \circ {}^1\pi^{\alpha_2}_{\mu_1(\beta)}. \tag{5}$$

Наконец, из направленности множества $\mathfrak{A}_1$ вытекает существование в нем элемента $\alpha \geqslant \alpha_1, \alpha_2$. Покажем, что α удовлетворяет определению морфизма $\Phi_2 \circ \Phi_1$ для пары $\gamma \geqslant \gamma'$. Надо показать, что имеет место равенство

$$ {}^2f_{\gamma'} \circ {}^1f_{\mu_2(\gamma')} \circ {}^1\pi^{\alpha}_{\mu_1\mu_2(\gamma')} = {}^3\pi^{\gamma}_{\gamma'} \circ {}^2f_{\gamma} \circ {}^1f_{\mu_2(\gamma)} \circ {}^1\pi^{\alpha}_{\mu_1\mu_2(\gamma)}. \tag{6} $$

Имеем

$$ \begin{aligned} {}^2f_{\gamma'} \circ {}^1f_{\mu_2(\gamma')} \circ {}^1\pi^{\alpha}_{\mu_1\mu_2(\gamma')} &= {}^2f_{\gamma'} \circ \left({}^1f_{\mu_2(\gamma')} \circ {}^1\pi^{\alpha_2}_{\mu_1\mu_2(\gamma')}\right) \circ {}^1\pi^{\alpha}_{\alpha_2} = \\ &= (\text{согласно } (5)) = {}^2f_{\gamma'} \circ \left({}^2\pi^{\beta}_{\mu_2(\gamma')} \circ {}^1f_{\beta} \circ {}^1\pi^{\alpha_2}_{\mu_1\beta}\right) \circ {}^1\pi^{\alpha}_{\alpha_2} = \\ &= (\text{согласно } (3)) = \left({}^3\pi^{\gamma}_{\gamma'} \circ {}^2f_{\gamma} \circ {}^2\pi^{\beta}_{\mu_2(\gamma)}\right) \circ {}^1f_{\beta} \circ {}^1\pi^{\alpha}_{\mu_1\beta} = \\ &= {}^3\pi^{\gamma}_{\gamma'} \circ {}^2f_{\gamma} \circ \left({}^2\pi^{\beta}_{\mu_2(\gamma)} \circ {}^1f_{\beta} \circ {}^1\pi^{\alpha_1}_{\mu_1\beta}\right) \circ {}^1\pi^{\alpha}_{\alpha_1} = (\text{согласно } (4)) = \\ &= {}^3\pi^{\gamma}_{\gamma'} \circ {}^2f_{\gamma} \circ {}^1f_{\mu_2(\gamma)} \circ {}^1\pi^{\alpha_1}_{\mu_1\mu_2(\gamma)} \circ {}^1\pi^{\alpha}_{\alpha_1} = \\ &= {}^3\pi^{\gamma}_{\gamma'} \circ {}^2f_{\gamma} \circ {}^1f_{\mu_2(\gamma)} \circ {}^1\pi^{\alpha}_{\mu_1\mu_2(\gamma)}, \end{aligned} $$

что и требовалось доказать.

1.20. Предложение 1.19 показывает, что такое определение композиции морфизмов превращает семейство обратных спектров и их морфизмов в категорию, которую обозначим Sp. Тождественный морфизм спектра S в себя определяется естественным образом.

1.21. Функтор. Пусть $\mathscr{C} = (\mathscr{O}, \mathfrak{M})$ и $\mathscr{C}' = (\mathscr{O}', \mathfrak{M}')$ — две категории. Отображение $\mathscr{F}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$, переводящее объекты в объекты, а морфизмы в морфизмы, называется ***ковариантным*** (***контравариантным***) ***функтором*** из категории $\mathscr{C}$ в категорию $\mathscr{C}'$, если:

1°) для всякого морфизма $f\colon X \to Y$ из категории $\mathscr{C}$ морфизм $\mathscr{F}(f)$ действует из $\mathscr{F}(X)$ в $\mathscr{F}(Y)$ (из $\mathscr{F}(Y)$ в $\mathscr{F}(X)$);

2°) $\mathscr{F}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(X)}$ для всякого $X \in Q$;

3°) $\mathscr{F}(f \circ g) = \mathscr{F}(f) \circ \mathscr{F}(g) (\mathscr{F}(g) \circ \mathscr{F}(f))$.

Мы увидим сейчас, что предел спектра можно дополнить до ковариантного функтора из категории спектров в категорию топологических пространств.

1.22. Теорема. *Операция* $\lim$ *взятия предела обратного спектра продолжается до ковариантного функтора* $\lim\colon \mathrm{Sp} \to \mathrm{Top}$.

Доказательство. Прежде всего надо определить пределы морфизмов. Пусть (μ, Φ) — морфизм спектра $S_1 = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}, \mathfrak{A}_1\}$ в спектр $S_2 = \{Y_\beta, \rho^\beta_{\beta'}, \mathfrak{A}_2\}$, и пусть $x = (x_\alpha)$ — нить спектра S_1. Для каждого $\beta \in \mathfrak{A}_2$ положим $y_\beta = f_\beta(x_{\mu(\beta)})$ и покажем, что $y = (y_\beta)$ — нить спектра S_2. Надо проверить, что выполнено равенство

$$y_{\beta'} = \rho^\beta_{\beta'}(y_\beta) \tag{7}$$

для $\beta' \leqslant \beta$. По определению морфизма спектров (см. 1.17) существует такое $\alpha > \mu(\beta), \mu(\beta')$, что справедливо равенство (2). Подставляя в это равенство элемент x_α нити x, получаем равенство (7). Таким образом, определено отображение $f\colon \lim S_1 \to \lim S_2$. Из его определения следует, что

$$f = \prod\{\Delta\{f_\beta\colon \mu(\beta) = \alpha\}\colon \alpha \in \mu(\mathfrak{A}_2)\} \circ p_{\mu(\mathfrak{A}_2)}|\lim S_1, \tag{8}$$

где $p_{\mu(\mathfrak{A}_2)}\colon \prod\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}_1\} \to \prod\{X_\alpha\colon \alpha \in \mu(\mathfrak{A}_2)\}$ — проектирование произведения. Отсюда вытекает непрерывность отображения $f = \lim(\mu, \Phi)$. Ясно также, что операция lim переводит тождественный морфизм спектра в тождественный гомеоморфизм его предела. Остается проверить свойство 3° функтора.

В обозначениях предложения 1.19 пусть $(\mu_1, \Phi_1)\colon S_1 \to S_2$ и $(\mu_2, \Phi_2)\colon S_2 \to S_3$ — морфизмы спектров, и пусть ${}^if = \lim\{\mu_i, \Phi_i\}$. Тогда согласно определению (8) предела морфизма имеем

$$
\begin{gathered}
{}^2f \circ {}^1f = (\prod\{\Delta\{{}^2f_\gamma\colon \mu_2(\gamma) = \beta\}\colon \beta \in \mu_2(\mathfrak{A}_3)\} \circ p_{\mu_2(\mathfrak{A}_3)}|\lim S_2) \circ \\
\circ (\prod\{\Delta\{{}^1f_\beta\colon \mu_1(\beta) = \alpha\}\colon \alpha \in \mu_1(\mathfrak{A}_2)\} \circ p_{\mu_1(\mathfrak{A}_2)}|\lim S_1) = \\
\text{(согласно включению } {}^1f(\lim S_1) \subset \lim S_2) = \\
= (\prod\{\Delta\{{}^2f_\gamma\colon \mu_2(\gamma) = \beta\}\colon \beta \in \mu_2(\mathfrak{A}_3)\} \circ p_{\mu_2(\mathfrak{A}_3)} \circ \\
\circ (\prod\{\Delta\{{}^1f_\beta\colon \mu_1(\beta) = \alpha\}\colon \alpha \in \mu_1(\mathfrak{A}_2)\} \circ p_{\mu_1(\mathfrak{A}_2)}|\lim S_1) = \\
= \text{(операция «забывания» координат коммутирует с операцией} \\
\text{произведения и «забывания» отображений)} = \\
= (\prod\{\Delta\{{}^2f_\gamma\colon \mu_2(\gamma) = \beta\}\colon \beta \in \mu_2(\mathfrak{A}_3)\} \circ \\
\circ (\prod\{\Delta\{{}^1f_{\mu_2(\gamma)}\colon \mu_1\mu_2(\gamma) = \alpha\}\colon \alpha \in \mu_1\mu_2(\mathfrak{A}_3)\} \circ \\
\circ p_{\mu_1\mu_2(\mathfrak{A}_3)}|\lim S_1) = \text{(в силу равенства}
\end{gathered}
$$

$$\prod\{\Delta\{{}^2f_\gamma\colon \mu_2(\gamma)=\beta\}\colon \beta\in\mu_2(\mathfrak{A}_3)\}\circ$$

$$\circ\prod\{\Delta\{{}^1f_{\mu_2(\gamma)}\colon \mu_1\mu_2(\gamma)=\alpha\}\colon \alpha\in\mu_1\mu_2(\mathfrak{A}_3)\}=$$

$$=\prod\{\Delta\{{}^2f_\gamma\circ{}^1f_{\mu_2(\gamma)}\colon \mu_1\mu_2(\gamma)=\alpha\}\colon \alpha\in\mu_1\mu_2(\mathfrak{A}_3)\},$$

которое проверяется покоординатно) $=$

$$\prod\{\Delta\{{}^2f_\alpha\circ{}^1f_{\mu_2(\gamma)}\colon \mu_1\mu_2(\gamma)=\alpha\}\colon \alpha\in\mu_1\mu_2(\mathfrak{A}_3)\}\circ$$

$$\circ\, p_{\mu_1\mu_2(\mathfrak{A}_3)}|\lim S_1=\lim(\mu_1\circ\mu_2,\Phi_2\circ\Phi_1).$$

Теорема доказана.

1.23. Замечание. Из определения отображения $f = \lim(\mu,\Phi)$ вытекает важное равенство

$$p_\beta\circ f=f_\beta\circ\pi_{\mu(\beta)}. \tag{9}$$

Ясно, что отображение $f\colon \lim S_1\to\lim S_2$ условием (9), выполненным для всякого $\beta\in\mathfrak{A}_2$, определено однозначно. Таким образом, предел морфизма между спектрами однозначно определен.

1.24. Приведем некоторые примеры морфизмов спектров.

1. Спектр S_2 является подспектром спектра S_1, отображение $\mu\colon \mathfrak{A}_2\to\mathfrak{A}_1$ есть тождественное вложение, а каждое отображение $f_\beta\colon X_\beta\to X_\beta$ — тождественный гомеоморфизм. Этот пример показывает, что предел всякого спектра естественным образом проектируется в предел всякого его подспектра.

2. Спектр S_1 — конфинальный подспектр спектра S_2, т. е. $S_1\subset S_2$, и множество $\mathfrak{A}_1$ конфинально множеству $\mathfrak{A}_2$. Отображение $\mu\colon \mathfrak{A}_2\to\mathfrak{A}_1$ продолжает тождественное отображение множества $\mathfrak{A}_1$. Для $\beta\in\mathfrak{A}_2\setminus\mathfrak{A}_1$ берем в качестве $\mu(\beta)$ произвольный элемент из $\mathfrak{A}_1$ так, что $\mu(\beta)\geqslant\beta$. Такой элемент $\mu(\beta)$ существует согласно конфинальности $\mathfrak{A}_1$ множеству $\mathfrak{A}_2$. В качестве отображения $f_\beta\colon X_\mu(\beta)\to X_\beta$ берем проекцию $\pi_\beta^{\mu(\beta)}$ спектра S_2. Направленность вверх множества $\mathfrak{A}_1$ обеспечивает нам выполнение равенства (2). Проверим, что предел $\lim\Phi$ так определенного морфизма $\Phi\colon S_1\to S_2$ является гомеоморфизмом. Этот факт обычно формулируют следующим образом.

1.25. Предложение. *Предел спектра естественно гомеоморфен пределу любого его конфинального подспектра.*

Доказательство. Пусть f_1: $\lim \Phi$: $\lim S_1 \to \lim S_2$. Через f_2: $\lim S_2 \to \lim S_1$ обозначим предел морфизма, описанного в примере 1. Легко видеть, что композиция $f_2 \circ f_1$ — тождественный автогомеоморфизм $\lim S_1$. Поэтому f_1 будет гомеоморфизмом, если покажем, что f_1 есть отображение на $\lim S_2$. Но из определения отображения f_1 вытекает, что в нить $y = (y_\beta\colon \beta \in \mathfrak{A}_2) \in \lim S_2$ посредством f_1 переводится нить $y' = (y_\beta\colon \beta \in \mathfrak{A}_1) \in \lim S_1$. Предложение 1.25 доказано.

1.26. Пример 3. Наиболее часто в практике встречаются морфизмы спектров, заданных над одним и тем же множеством индексов $\mathfrak{A}$. При этом отображение $\mu\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ предполагается тождественным, а условие (2) можно заменить на более сильное условие

$$f_{\beta'} \circ \pi^{\beta}_{\beta'} = \rho^{\beta}_{\beta'} \circ f_\beta. \tag{10}$$

Семейство спектров над фиксированным множеством индексов $\mathfrak{A}$ с так определенными морфизмами (они называются *точными морфизмами*) образует подкатегорию категории Sp, которую обозначим Sp$\mathfrak{A}$.

Точный морфизм $\Phi\colon S_1 \to S_2$ спектров называется *изоморфизмом*, если всякое отображение — гомеоморфизм. Ясно, что пределом изоморфизма является гомеоморфизм.

В следующем утверждении описывается еще один специфический пример морфизмов спектров.

1.27. Предложение. *Пусть даны спектр $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \mathfrak{A}\}$, пространство Y и семейство отображений $f_\alpha\colon Y \to X_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющее условию*

$$f_\beta = \pi^\alpha_\beta \circ f_\alpha \tag{11}$$

для любых $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, $\beta \leqslant \alpha$. Тогда существует единственное отображение $f\colon Y \to \lim S = X$, называемое пределом $\lim\{f_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *отображений f_α, такое, что*

$$f_\alpha = \pi_\alpha \circ f \tag{12}$$

для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$, где $\pi_\alpha\colon X \to X_\alpha$ — сквозная проекция спектра S. При этом:

1) *если $f_\alpha(Y)$ плотно в X_α, то $f(Y)$ плотно в X;*

2) *если* Y *и все* X_α *— бикомпакты и* $f_\alpha(Y) = X_\alpha$, *то* $f(Y) = X$.

Доказательство. Существование и единственность отображения $f\colon Y \to X$ вытекает из 1.22 и 1.23. В самом деле, пространство Y с его тождественным отображением можно рассматривать как спектр над индексирующим множеством, состоящим из одного элемента. Тогда семейство $\Phi = \{f_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — морфизм из Y в S согласно (11).

Проверим теперь свойство 1). Пусть $x \in X$ и Ox — произвольная окрестность. Согласно 1.9 существует такое $\alpha \in \mathfrak{A}$ и такое открытое в X_α множество U, что $x \in \pi\alpha^{-1}U \subset Ox$. Поскольку $f_\alpha(Y)$ плотно в X_α, то существует такая точка $y \in Y$, что $f_\alpha(y) \in U$. Тогда $f(y) \in \pi_\alpha^{-1}U \subset Ox$. Свойство 2) вытекает из 1) и из того, что бикомпакт $f(Y)$ замкнут в объемлющем его хаусдорфовом пространстве X. Предложение доказано.

1.28. Теперь покажем, что замкнутость множества F в предложении 1.16 существенна. Положим $X_n = [0; 1 - (1/n)]$. Отображение $\pi_n^m\colon X_m \to X_n$ тождественно на X_n и сжимает отрезок $[1 - (1/n); 1 - (1/m)]$ в точку $1/n$. Предел спектра $S = \{X_m, \pi_n^m, \omega\}$ гомеоморфен отрезку $[0; 1]$. В самом деле, пусть $f_n\colon [0; 1] \to X_n$ — отображение, тождественное на X_n и сжимающее отрезок $[1 - (1/n); 1]$ в точку $1/n$. Семейство отображений $\{f_n\}$ удовлетворяет условиям предложения 1.27. Поэтому предельное отображение $f\colon [0; 1] \to \lim S$ есть отображение «на». Всякая точка $t < 1$ есть точка взаимной однозначности для всех отображений f_n при $n > 1/(1 - t)$. Поэтому всякое $t < 1$ является точкой взаимной однозначности предельного отображения f. Итак, все точки отрезка $[0; 1]$, кроме, может быть, его правого конца, суть точки взаимной однозначности отображения f. Следовательно, f — гомеоморфизм, а отображения f_n совпадают со сквозными проекциями π_n.

Возьмем теперь в пределе спектра S незамкнутое множество $F = [0; 1)$. Тогда $\pi_n(F) = X_n$, а $\bigcap\limits_n \pi_n^{-1}\pi_n(F) = \lim S \neq F$.

1.29. Предложение. *Пусть* $\Phi\colon S_1 \to S_2$ *— такой точный морфизм спектра* $S_1 = \{X_\alpha, \pi_{\alpha'}^{\alpha}, \mathfrak{A}\}$ *в спектр* $S_2 =$

$= \{Y_\alpha, \rho^\alpha_{\alpha'}, \mathfrak{A}\}$, *что всякий его элемент* $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$ *является вложением. Тогда* $\pi^\alpha_{\alpha'} = \rho^\alpha_{\alpha'}|X_\alpha$ *и* $\lim S_1 = \bigcap\limits_\alpha \rho_\alpha^{-1} X_\alpha$.

Доказательство. Равенство $\pi^\alpha_{\alpha'} = \rho^\alpha_{\alpha'}|X_\alpha$ вытекает из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_{\alpha'} \arrow[d, "f_{\alpha'}"'] & X_\alpha \arrow[l, "\pi^\alpha_{\alpha'}"'] \arrow[d, "f_\alpha"] \\ Y_{\alpha'} & Y_\alpha . \arrow[l, "\rho^\alpha_{\alpha'}"'] \end{tikzcd}$$

Предел $\lim \Phi$ морфизма Φ — взаимно однозначное отображение. Проверим непрерывность обратного к $f = \lim \Phi$ отображения. Пусть $x \in \lim S_1$ и Ox — произвольная окрестность точки x. Существует такое $\alpha \in \mathfrak{A}$ и такая окрестность Ox_α точки $x_\alpha = \pi_\alpha(x)$ в X_α, что $\pi_\alpha^{-1}(Ox_\alpha) \subset Ox$. Тогда множество $\rho_\alpha^{-1} f_\alpha(Ox_\alpha)$ будет такой окрестностью U точки $f(x)$ в $f(\lim S_1)$, что $f^{-1}U \subset Ox$.

Итак, $\lim S_1 \subset \lim S_2$. Включение $\lim S_1 \subset \bigcap\limits_\alpha \rho_\alpha^{-1} X_\alpha$ очевидно. Если же $y \in \bigcap\limits_\alpha \rho_\alpha^{-1} X_\alpha$, то семейство $\{\rho_\alpha(y)\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — нить спектра S_1, т. е. $\bigcap\limits_\alpha \rho_\alpha^{-1} X_\alpha \subset \lim S_1$. Предложение доказано.

Из предложений 1.16 и 1.29 вытекает

1.30. Предложение. *Пусть* $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}, \mathfrak{A}\}$ — *спектр и* F — *замкнутое подмножество его предела* $\lim S$. *Тогда* $F = \lim S_F$, *где* $S_F = \{\pi_\alpha(F), \pi^\alpha_{\alpha'}|\pi_\alpha(F)\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$.

Итак, от спектра $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}\}$ можно перейти к спектру $S_X = \{\pi_\alpha(X), \pi^\alpha_{\alpha'}|\pi_\alpha(X)\}$, где $X = \lim S$, с тем же пределом X.

1.31. Предложение. *Если* $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}\}$ — *спектр из бикомпактов с проекциями «на», то его сквозные проекции* $\pi_\alpha\colon \lim S \to X_\alpha$ *также являются эпиморфизмами.*

Доказательство. Предположим, что $\pi_{\alpha_0}(\lim S) \neq X_{\alpha_0}$ для некоторого α_0. Перейдя к конфинальной части спектра, можно считать, что $\pi_\alpha(X) \neq X_\alpha$ для всякого $\alpha (X = \lim S)$. Взяв непустой бикомпакт $F \subset X_{\alpha_0} \setminus \pi_{\alpha_0}(X)$, положим $F_\alpha = (\pi^\alpha_{\alpha_0})^{-1} F$ для $\alpha \geqslant \alpha_0$. Получим спектр $S' = \{F_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}|F_\alpha\}$ из непустых бикомпактов с пустым пределом, поскольку согласно 1.29 имеем

$\lim S' = \bigcap\limits_{\alpha} \pi_{\alpha}^{-1} F_{\alpha} = \pi_{\alpha_0}^{-1} F = \varnothing$. Это противоречие с теоремой 1.15 и доказывает наше предложение.

1.32. Предложение. *Если F_1, F_2 — непересекающиеся замкнутые подмножества предела спектра S и одно из них, например F_1, бикомпактно, то $\pi_{\alpha}(F_1) \cap \pi_{\alpha}(F_2) = \varnothing$ для некоторого α.*

Доказать самим.

§ 2. Связь спектров и произведений

2.1. Элемент α частично упорядоченного множества $\mathfrak{A}$ назовем *предельным элементом множества* $D \subset \mathfrak{A}$, если для любых двух элементов $\beta_1, \beta_2 \in D$, $\beta_i < \alpha$, существует такое $\gamma \in D$, что $\beta_i < \gamma < \alpha$, $i = 1, 2$. Для предельного элемента α множества $\mathfrak{A}$ множество

$$\mathfrak{A}|\alpha = \{\beta \in \mathfrak{A} \colon \beta < \alpha\}$$

направлено вверх. Если $S = \{X_{\alpha}, \pi_{\beta}^{\alpha}, \mathfrak{A}\}$ — спектр и γ — предельный элемент множества $\mathfrak{A}$, то через $S|\gamma$ обозначим ограничение спектра S на множество $\mathfrak{A}|\gamma$, т. е.

$$S|\gamma = \{X_{\alpha}, \pi_{\beta}^{\alpha}, \mathfrak{A}|\gamma\}.$$

2.2. Спектр $S = \{X_{\alpha}, \pi_{\beta}^{\alpha}, \mathfrak{A}\}$ называется *непрерывным*, если для всякого предельного элемента $\gamma \in \mathfrak{A}$ существующее согласно предложению 1.27 предельное отображение

$$\lim\{\pi_{\alpha}^{\gamma} \colon \alpha < \gamma\} \colon X_{\gamma} \to \lim(S|\gamma)$$

— гомеоморфизм.

2.3. Предложение. *Всякий спектр изоморфен конфинальной части непрерывного спектра.*

Доказательство. Пусть $S = \{X_{\alpha}, \pi_{\beta}^{\alpha}, \mathfrak{A}\}$ — спектр над множеством $\mathfrak{A}$. Обозначим $\overline{\mathfrak{A}}$ множество, получаемое из $\mathfrak{A}$ пополнением «двойниками» $\overline{\alpha}$ предельных элементов $\alpha \in \mathfrak{A}$. При этом считаем $\overline{\alpha} < \alpha$ и $\beta < \overline{\alpha}$ для всякого $\beta < \alpha$. Множество $\mathfrak{A}$ очевидно, конфинально множеству $\overline{\mathfrak{A}}$. Искомый непрерывный спектр $\overline{S}$ получается из спектра S пополнением пространствами

$X_{\overline{\alpha}} = \lim(S|\alpha)$ для предельных $\alpha \in \mathfrak{A}$ и соответствующими проекциями, а именно

$$\pi_{\overline{\alpha}}^{\alpha} = \lim\{\pi_{\beta}^{\alpha} \colon \beta < \alpha\},$$

$\pi_{\beta}^{\overline{\alpha}}$ — есть сквозная проекция спектра $S|\alpha$.

Остальные проекции спектра $\overline{S}$ — композиции только что указанных проекций и проекций спектра S. Предложение доказано.

2.4. Спектр $S = \{X_{\alpha}, \pi_{\beta}^{\alpha}, \mathfrak{A}\}$ называется *вполне упорядоченным*, если частично упорядоченное множество $\mathfrak{A}$ его индексов является вполне упорядоченным. При этом, как правило, предполагаем, что множество $\mathfrak{A}$ есть некоторый начальный отрезок $[0;\gamma)$ порядковых чисел.

Из доказательства предложения 2.3 извлекается

2.5. Предложение. *Всякий вполне упорядоченный спектр изоморфен конфинальной части непрерывного вполне упорядоченного спектра.*

2.6. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное множество и $\mathscr{D} = \{D\}$ — некоторое семейство его подмножеств. Семейство $\mathscr{D}$ называется *направлением в множестве* $\mathfrak{A}$, если 1) всякий элемент $\alpha \in \mathfrak{A}$ содержится в некотором множестве $D \in \mathscr{D}$ и 2) семейство $\mathscr{D}$ направлено отношением включения, т. е. для любых множеств $D, D' \in \mathscr{D}$ существует содержащее их множество $D'' \in \mathscr{D}$. Направление $\mathscr{D}$ называется непрерывным, если всякий его предельный элемент D является объединением меньших элементов.

Если направления рассматривать как покрытия множества $\mathfrak{A}$, то среди них существует *мельчайшее* направление, т. е. направление $\mathscr{D}$, вписанное во всякое другое направление $\mathscr{D}'$. Это направление $\mathscr{D}$ состоит из всех конечных подмножеств множества $\mathfrak{A}$.

Другое направление получим, если рассмотрим некоторое полное упорядочение w множества $\mathfrak{A} = \{\alpha \colon \alpha < \beta\}$ и положим $D_{\alpha} = \{\gamma \colon \gamma < \alpha\}$. Семейство $\mathscr{D} = \{D_{\alpha} \colon \alpha < \beta\}$ является непрерывным направлением, которое назовем (*вполне упорядоченным*) *направлением*, соответствующим полному упорядочению w множества $\mathfrak{A}$.

2.7. Пусть $\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — множество топологических пространств и $\mathscr{D}$ — направление в множестве $\mathfrak{A}$. Для всякого $D \in \mathscr{D}$ положим $X_D = \prod\limits_{\alpha\in D} X_\alpha$ и для $D, D' \in \mathscr{D}$, $D' \subset D$ обозначим $p^D_{D'}\colon X_D \to X_{D'}$ естественную проекцию произведения на подпроизведение (см. II.1.1). Семейство $\{X_D, p^D_{D'}, \mathscr{D}\}$ — обратный спектр, который назовем ***спектром над направлением*** $\mathscr{D}$ и обозначим $S_{\mathscr{D}}$.

2.8. Теорема. *Если $\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — множество топологических пространств и $\mathscr{D}$ — непрерывное направление в множестве индексов, то спектр $S_{\mathscr{D}}$ непрерывен, его предел совпадает с произведением $\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} X_\alpha$, а сквозные проекции спектра $S_{\mathscr{D}}$ — с проекциями p_D произведения.*

Доказательство. Возьмем отображение $p\colon \prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} X_\alpha \to \lim S_{\mathscr{D}} = X$, являющееся пределом отображений $p_D\colon \prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} X_\alpha \to X_D$ (см. 1.27). Это отображение взаимно однозначно согласно условию 1) из 2.6.

Построим отображение $q\colon X \to \prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} X_\alpha$, обратное к отображению p. Для этого надо построить отображение $q_\alpha\colon X \to X_\alpha$ в каждый сомножитель X_α. Возьмем произвольное множество $D \in \mathscr{D}$, содержащее α, и положим $q_\alpha = p^D_\alpha \circ \pi_D$, где $\pi_D\colon X \to X_D$ — сквозная проекция. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_D \arrow[d, "p^D_\alpha"'] & X \arrow[l, "\pi_D"'] \arrow[d, "\pi_{D'}"] \\ X_\alpha & X_{D'} \arrow[l, "p^{D'}_\alpha"'] \end{tikzcd}$$

вытекает независимость q_α от выбора D. Теперь полагаем $q = \mathop{\Delta}\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} q_\alpha\colon X \to \prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} X_\alpha$ (см. II.1.11). Рассмотрим композицию $p_D q$. Для всякого $\alpha \in D$ имеем $p^D_\alpha p_D q = q_\alpha$ по определению диагонального произведения. Но $q_\alpha = p^D_\alpha \pi_D$, значит, $p^D_\alpha p_D q = p^D_\alpha \pi_D$. Поэтому $p_D q = \pi_D$ и, следовательно, $p \circ q = (\lim p_D) \circ q = \lim(p_D \circ q) = \lim \pi_D = \mathrm{id}_X$. Таким образом, отображение q — обратное p. Следовательно, p есть гомеоморфизм, с точностью до которого $p_D = \pi_D$. Наконец, непрерывность спектра

$S_{\mathscr{D}}$ получается применением к спектру $S_{\mathscr{D}}|D$ уже доказанного. Теорема доказана.

2.9. Скажем, что отображения $f_i\colon X_i \to Y_i$ *гомеоморфны*, если существуют такие гомеоморфизмы $g\colon X_1 \to X_2$ и $h\colon Y_1 \to Y_2$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\ g\ } & X_2 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ Y_1 & \xrightarrow{\ h\ } & Y_2 \end{array}$$

2.10. Следствие. *Тихоновский куб I^τ является:*

а) *пределом спектра из конечномерных кубов I^n;*

б) *пределом непрерывного вполне упорядоченного спектра из тихоновских кубов $I^{\tau'}$ веса $\tau' < \tau$.*

При этом для $\tau = \omega_{\alpha+1}$ куб I^τ есть предел непрерывного спектра S, все проекции в котором гомеоморфны проектированию $I^{\omega_\alpha} \times I^{\omega_\alpha} \to I^{\omega_\alpha}$.

2.11. Следствие. *Канторов дисконтинуум D^τ является:*

а) *пределом спектра из конечных пространств;*

б) *пределом непрерывного вполне упорядоченного спектра из канторовых дисконтинуумов $D^{\tau'}$ веса $\tau' < \tau$.*

При этом для $\tau = \omega_{\alpha+1}$ дисконтинуум D^τ есть предел непрерывного спектра S, все проекции в котором гомеоморфны проектированию $D^{\omega_\alpha} \times D^{\omega_\alpha} \to D^{\omega_\alpha}$.

2.12. Теорема. *Всякий бикомпакт X веса τ является:*

а) *пределом спектра из (конечномерных) компактов;*

б) *пределом непрерывного вполне упорядоченного спектра из бикомпактов веса $< \tau$.*

Доказательство. По теореме Тихонова X можно считать подмножеством куба I^τ. Теперь получаем наше утверждение последовательно, применяя утверждения 2.10, 1.30 и 2.13.

2.13. Предложение. *Если S — непрерывный спектр из бикомпактов и F замкнуто в $\lim S$, то спектр S_F* (см. 1.25) *также непрерывен.*

Доказать самим.

2.14. Пусть $f\colon X \to Y$ — послойное произведение отображений $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ (см. II.2.1) и $D \subset \mathfrak{A}$. Обозначим $f^D\colon X_D \to Y$ послойное произведение семейства $\{f_\alpha\colon \alpha \in \in D\}$. Если $D' \subset D$ и $p^D_{D'}\colon \prod\limits_{\alpha \in D} X_\alpha \to \prod\limits_{\alpha \in D'} X_\alpha$ — проектирование, то непосредственная проверка показывает, что $p^D_{D'}(X_D) \subset X_{D'}$. Обозначив $\pi^D_{D'}\colon X_D \to X_{D'}$ ограничение $p^D_{D'}$ на X_D, также непосредственно убеждаемся в том, что

$$f^D = f^{D'} \cdot \pi^D_{D'}. \tag{1}$$

Обозначим также $\pi^{\mathfrak{A}}_D$ через π_D. При $D = \{\alpha\}$ очевидно, что $\pi_D = \pi_\alpha$. В силу II.2.3 отображения $\pi^D_{D'}$ и π_D являются эпиморфизмами.

Пусть теперь $\mathscr{D}$ — направление в множестве $\mathfrak{A}$. Положим

$$S^\theta_{\mathscr{D}} = \{X_D, \pi^D_{D'}, \mathscr{D}\}.$$

Поскольку при $D'' \subset D' \subset D$ имеем $\pi^D_{D''} = \pi^{D'}_{D''} \circ \pi^D_{D'}$, семейство $S^\theta_{\mathscr{D}}$ — обратный спектр. Положим

$$S_Y = \{Y_D, i^D_{D'}, \mathscr{D}\},$$

где $Y_D = Y$, а $i^D_{D'} = \mathrm{id}_Y$. Через $\Phi_{\mathscr{D}}$ обозначим морфизм спектра $S^\theta_{\mathscr{D}}$ в спектр S_Y, состоящий из отображений $f^D\colon X_D \to Y_D$.

2.15. Теорема. *Пусть $\{f_\alpha\colon X_\alpha \to Y, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — семейство отображений на хаусдорфово пространство Y и $\mathscr{D}$ — направление в множестве $\mathfrak{A}$. Тогда предел спектра $S_{\mathscr{D}}$ совпадает с веерным произведением X пространств X_α относительно f_α, сквозные проекции спектра $S^\theta_{\mathscr{D}}$ совпадают с π_D и послойное произведение f отображений f_α совпадает с $\lim \Phi_{\mathscr{D}}$.*

Доказательство. Заметим сначала, что диагональ $\Delta(Y^{\mathfrak{A}})$ замкнута в произведении хаусдорфовых пространств. Поэтому X замкнуто в произведении $\prod\limits_\alpha X_\alpha$. Теперь, применяя последовательно 2.8 и 1.30, получаем первые два утверждения нашей теоремы. Последнее утверждение следует из отмеченного в 2.14 равенства $f^{\mathfrak{A}} = f^D \cdot \pi^{\mathfrak{A}}_D$ (1), совпадающего с равенством $f = f^D \circ \circ \pi_D$, и только что доказанного (π_D — сквозные проекции $S^\theta_{\mathscr{D}}$) равенства $\lim \Phi_{\mathscr{D}} = f^D \circ \pi_D$. Теорема доказана.

§ 3. Теорема о спектральном представлении отображений

3.1. Пусть τ — бесконечное кардинальное число. Частично упорядоченное множество $\mathfrak{A}$ назовем *τ-полным*, если всякое его подмножество C мощности $\leqslant \tau$ имеет в $\mathfrak{A}$ точную верхнюю грань. При $\tau = \omega$ назовем τ-полные множества *сигма-полными*. Спектр из бикомпактов с проекциями «на» над τ-полным (соответственно сигма-полным) частично упорядоченным множеством с наименьшим элементом 0 назовем *τ-полным* (соответственно *сигма-полным*) *спектром*. Ясно, что при $\tau' \leqslant \tau$ всякий τ-полный спектр является τ'-полным.

3.2. Лемма. *Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \mathfrak{A}\}$ — сигма-полный спектр из бикомпактов. Пусть $X = \lim S$, $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда существует такое $\alpha \in \mathfrak{A}$ и такая непрерывная функция $\psi\colon X_\alpha \to \mathbb{R}$, что $\varphi = \psi \circ \pi_\alpha$.*

Доказательство. В кольце $C(X)$ рассмотрим множество C_0 всех функций f вида $g \circ \pi_\beta$, где $\beta \in \mathfrak{A}$ и $g \in C(X_\beta)$. Ясно, что C_0 содержит все константы. Покажем, что C_0 есть подкольцо $C(X)$. Пусть $f_1, f_2 \in C_0$. Существуют такие $\beta_i \in \mathfrak{A}$ и такие непрерывные функции $g_i\colon X_{\beta_i} \to \mathbb{R}$, что $f_i = g_i \circ \pi_{\beta_i}$, $i = 1, 2$. Возьмем $\beta \geqslant \beta_1, \beta_2$ и положим $g = (g_1 \circ \pi^\beta_{\beta_1}) + (g_2 \cdot \pi^\beta_{\beta_2})\colon X_\beta \to \mathbb{R}$. Тогда $g \circ \pi_\beta = g_1 \circ \pi^\beta_{\beta_1} \circ \pi_\beta + g_2 \circ \pi^\beta_{\beta_2} \circ \pi_\beta = f_1 + f_2$. Аналогично показывается, что $f_1 \cdot f_2 \in C_0$.

Наконец, если $x, y \in X$ и $x \neq y$, то $\pi_\beta(x) \neq \pi_\beta(y)$ для некоторого $\beta \in \mathfrak{A}$. Существует такая функция $g \in C(X_\beta)$, что $g\pi_\beta(x) \neq$ $\neq g\pi_\beta(y)$. Тогда для функции $f = g \circ \pi_\beta \in C_0$ имеем $f(x) \neq f(y)$.

Итак, C_0 удовлетворяет условиям теоремы Вейерштрасса–Стоуна. Значит, для каждого i существует $\alpha_i \in \mathfrak{A}$ и такая функция $g_i \in C(X_{\alpha_i})$, что $|f - g_i \circ \pi_{\alpha_i}| < 1/i$. Поскольку множество $\mathfrak{A}$ сигма-полно, имеем $\alpha = \sup \alpha_i \in \mathfrak{A}$. Рассмотрим последовательность $\psi_i = g_i \circ \pi^\alpha_{\alpha_i}$. Эта последовательность фундаментальна. В самом деле, для $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что $|f - g_i \circ \pi_{\alpha_i}| <$ $< \varepsilon/2$ для всякого $i \geqslant n_0$. Пусть теперь $m, n \geqslant n_0$, $y \in X_\alpha$, $x \in X$ и $\pi_\alpha(x) = y$. Тогда

$$|\psi_m(y) - \psi_n(y)| = |g_m \pi^\alpha_{\alpha_m}(y) - g_n \pi^\alpha_{\alpha_n}(y)| =$$

$$= |g_m \pi_{\alpha_m}(x) - g_n \pi_{\alpha_n}(x)| =$$
$$= |g_m \pi_{\alpha_m}(x) - f(x) + f(x) - g_n \pi_{\alpha_n}(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Функция $\psi = \lim \psi_i$ непрерывна согласно I.2.20. Имеем $f = \psi \circ \pi_\alpha$, так как $|f - \psi_n \pi_\alpha| = |f - g_n \pi_{\alpha_n}| < \varepsilon/2$ при $n \geqslant n_0$. Лемма доказана.

3.3. Факторизующая лемма. *Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \mathfrak{A}\}$ — τ-полный спектр, X — его предел, и пусть Y — бикомпакт веса $\leqslant \tau$. Тогда для всякого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ существует такое $\alpha \in \mathfrak{A}$ и такое непрерывное отображение $g\colon X_\alpha \to Y$, что $f = g \circ \pi_\alpha$.*

Доказательство. Существует вложение $i\colon Y \to I^\tau$. Пусть $I^\tau = \prod\{I_\beta\colon \beta \in D\}$ и $p_\beta\colon I^\tau \to I_\beta$ — проектирование. Для каждой функции $\varphi_\beta = p_\beta \circ i \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ по лемме 3.2 существует $\alpha(\beta) \in \mathfrak{A}$ и такая функция $\psi_\beta\colon X_{\alpha(\beta)} \to \mathbb{R}$, что $\varphi_\beta = \psi_\beta \circ \pi_{\alpha(\beta)}$. Поскольку $\mathfrak{A}$ τ-полно, имеем $\alpha = \sup\{\alpha(\beta)\colon \beta \in D\} \in \mathfrak{A}$. Для $\beta \in D$ положим $g_\beta = \psi_\beta \circ \pi^\alpha_{\alpha(\beta)}\colon X_\alpha \to I_\beta \subset \mathbb{R}$. Пусть

$$g' = \Delta\{g_\beta\colon \beta \in D\}\colon X_\alpha \to \prod\{I_\beta\colon \beta \in D\} = I^\tau$$

Покажем, что $i \circ f = g' \circ \pi_\alpha$. Достаточно проверить это равенство покоординатно. Имеем $p_\beta \circ g' \circ \pi_\alpha =$ (по определению диагонального произведения) $= g_\beta \circ \pi_\alpha = \psi_\beta \circ \pi^\alpha_{\alpha(\beta)} \circ \pi_\alpha = \psi_\beta \circ \pi_{\alpha(\beta)} = \varphi_\beta = p_\beta \circ i \circ f$. Положим теперь $g = i^{-1} \circ g'$. Ясно, что $f = g \circ \pi_\alpha$. Лемма доказана.

3.4. Говорят, что отображение $h\colon X \to Z$ переводит отображение $f\colon X \to Y$ в отображение $g\colon Z \to Y$, если $f = g \circ h$. В таком контексте ясно, что означает «отображение f вложено в отображение g», «отображение g является образом отображения f» и т. д.

Весом отображения $f\colon X \to Y$ называется такое наименьшее кардинальное число τ, что f вкладывается в проектирование $p_Y\colon Y \times Z \to Y$, где $wZ = \tau$. В этом случае пишут $wf = \tau$.

Вес всякого отображения $f\colon X \to Y$ определен и не превосходит веса пространства X. В самом деле, отображение $x \to (x, f(x))$ осуществляет вложение отображения f в проектирование $p_Y\colon Y \times X \to Y$.

3.5. Говорят, что отображение $f\colon X \to Y$ *разложено в спектр* $S = \{X_\alpha, f_\beta^\alpha, \mathfrak{A}\}$, если $\mathfrak{A}$ имеет наименьший элемент 0 и f гомеоморфно сквозной проекции f_0 спектра S.

3.6. Факторизующая лемма для отображений. *Пусть отображение $f\colon X \to Y$ бикомпактов разложено в τ-полный спектр $S = \{X_\alpha, f_\beta^\alpha, \mathfrak{A}\}$, и пусть $g\colon Z \to Y$ — отображение бикомпакта Z, имеющее вес $wg \leqslant \tau$. Тогда для всякого отображения $h\colon X \to Z$, переводящего отображение f в отображение g, найдется такой индекс $\alpha \in \mathfrak{A}$ и такое отображение $k\colon X_\alpha \to Z$, что $h = k \circ f_\alpha$.*

Доказательство. Поскольку $wg \leqslant \tau$, отображение g по второй теореме Тихонова можно вложить в проектирование $p_Y\colon Y \times I^\tau \to Y$.

Поскольку отображение $g\colon Z \to Y$ вложено в проектирование pY, а h переводит f в g, имеем

$$p_Y \circ h = f. \tag{1}$$

Определим отображение $h_2\colon X \to I^\tau$, полагая

$$h_2 = p_2 \circ h, \tag{2}$$

где $p_2\colon Y \times I^\tau \to I^\tau$ — проектирование. По лемме 3.3 существуют такое $\alpha \in \mathfrak{A}$ и такое отображение $h^\alpha\colon X_\alpha \to I^\tau$, что

$$h_2 = h^\alpha \circ f_\alpha. \tag{3}$$

Положим теперь

$$k = f_0^\alpha \Delta h^\alpha\colon X_\alpha \to Y \times I^\tau.$$

Имеем $k \circ f_\alpha = (f_0^\alpha \Delta h^\alpha) \circ f_\alpha = (f_0^\alpha \circ f_\alpha)\Delta(h^\alpha \circ f_\alpha) =$ (согласно(3)) $= f\Delta h_2 =$ (согласно (2)) $= f\Delta(p_2 \circ h) =$ (согласно (1)) $= (p_Y \circ h)\Delta(p_2 \circ h) = (p_Y \Delta p_2) \circ h = \mathrm{id}_{Y\times I} \circ h = h$. Лемма доказана.

3.7. Непрерывный τ-полный спектр, проекции которого имеют вес $\leqslant \tau$, назовем *τ-спектром*. При $\tau = \omega$ получаем определение *сигма-спектра*.

3.8. Теорема. *Пусть $S = \{X_\alpha, \pi_{\alpha'}^\alpha, \mathfrak{A}\}$ — τ-полный спектр, $T = \{Y_\beta, \rho_{\beta'}^\beta, \mathfrak{B}\}$ — τ-спектр, X и Y — их пределы* *соответственно. Пусть заданы такие отображения* $f_0\colon X_0 \to Y_0$ *и* $f\colon X \to Y$, *что*

$$\rho_0 \circ f = f_0 \circ \pi_0. \tag{4}$$

Тогда существует такой морфизм $(\mu, \Phi)\colon S \to T$, $\Phi = \{f_{(\beta)}^{\mu(\beta)}\colon X_{\mu(\beta)} \to Y_\beta, \beta \in \mathfrak{B}\}$, *что* $f_0^{\mu(0)} = f_0$ *и*

$$\rho_\beta \circ f = f_{(\beta)}^{\mu(\beta)} \circ \pi_{\mu(\beta)}. \tag{5}$$

Доказательство. Поскольку T есть τ-спектр, проекции ρ_0^β имеют вес $\leqslant \tau$. Тогда по лемме 3.6 для $\beta \in \mathfrak{B}$ найдется такой индекс $\mu(\beta) \in \mathfrak{A}$ и такое отображение $f_\beta^{\mu(\beta)}\colon X_{\mu(\beta)} \to Y_\beta$, что выполняется равенство (5). Поскольку проекции в спектре S являются эпиморфизмами, равенство (5) эквивалентно равенству

$$f_\beta^{\mu(\beta)} = \rho_\beta \circ f \circ \pi_{\mu(\beta)}^{-1}. \tag{6}$$

Теперь проверим, что семейство отображений $f_\beta^{\mu(\beta)}$, $\beta \in \mathfrak{B}$, удовлетворяет равенству (2) из определения 1.17 морфизма спектров. Пусть $\beta \geqslant \beta'$ и $\alpha \geqslant \mu(\beta), \mu(\beta')$ выбрано произвольно.

Для произвольной точки $x \in X_\alpha$ имеем

$$\begin{aligned} f_{\beta'}^{\mu(\beta')} \circ \pi_{\mu(\beta')}^{\alpha}(x) = {} & \text{(согласно (6))} = \\ & = \rho_{\beta'} \circ f \circ \pi_{\mu(\beta')}^{-1} \circ \pi_{\mu(\beta')}^{\alpha}(x) \supset \rho_{\beta'} \circ f \circ \pi_\alpha^{-1}(x), \end{aligned}$$

откуда в силу непустоты множества $\pi_\alpha^{-1}(x)$ получаем

$$f_{\beta'}^{\mu(\beta')} \circ \pi_{\mu(\beta')}^{\alpha}(x) = \rho_{\beta'} \circ f \circ \pi_\alpha^{-1}(x).$$

Аналогично,

$$\rho_{\beta'}^{\beta} \circ f_\beta^{\mu(\beta)} \circ \pi_{\mu(\beta)}^{\alpha}(x) = \rho_{\beta'} \circ f \circ \pi_\alpha^{-1}(x).$$

Сравнивая левые части последних двух равенств, получаем равенство (2) из 1.17. Теорема доказана.

3.9. Подмножество D частично упорядоченного множества называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные элементы (см. 2.1). Ограничение спектра S на замкнутое подмножество индексирующего множества называется *замкнутым подспектром* спектра S.

3.10. Спектральная теорема для отображений. *Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}, \mathfrak{A}\}$ — непрерывный τ-полный спектр, $T = \{Y_\alpha, \rho^\alpha_{\alpha'}, \mathfrak{A}\}$ — τ-спектр, а X и Y — их пределы соответственно. Пусть заданы отображения $f_0\colon X_0 \to Y_0$ и $f\colon X \to Y$, удовлетворяющие условию* (4). *Тогда отображение f является пределом морфизма между замкнутыми конфинальными подспектрами спектров S и T.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3.8, отображения f_α имеют вид $\rho_\alpha \circ f \circ \pi_\alpha^{-1}$. Надо показать только, что в $\mathfrak{A}$ замкнуто и конфинально множество $\mathfrak{A}_0$ тех α, для которых отображение $\rho_\alpha \circ f \circ \pi_\alpha^{-1}$ однозначно (непрерывным оно будет в силу факторности π_α). Замкнутость множества $\mathfrak{A}_0$ вытекает из непрерывности спектров S и T. Проверим его конфинальность. По теореме 3.8 для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ существует $\mu(\alpha) \in \mathfrak{A}$, для которого отображение $\rho_\alpha \circ f \circ \pi_{\mu(\alpha)}^{-1}$ однозначно. Без ограничения общности можно считать, что $\mu(\alpha) \geqslant \alpha$. Пусть $\mu(\alpha) = \alpha_1$, $\mu(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$ и $\alpha_0 = \sup \alpha_i$. Тогда отображение $\rho_{\alpha_i} \circ f \circ \pi_{\alpha_0}^{-1}$ однозначно для каждого i, откуда в силу непрерывности спектра T вытекает взаимная однозначность и отображения $\rho_{\alpha_0} \circ f \circ \pi_{\alpha_0}^{-1}$. Теорема 3.10 доказана.

Поскольку отображения $\rho_\alpha \circ f \circ \pi_\alpha^{-1}$ и $\pi_\alpha \circ f^{-1} \circ \rho_\alpha^{-1}$ взаимно обратны, а пересечение двух замкнутых конфинальных множеств замкнуто и конфинально, из теоремы 3.10 непосредственно вытекает

3.11. Следствие. *Гомеоморфизм двух отображений, разложенных в τ-спектры над одним и тем же направленным множеством, порождается изоморфизмом замкнутых конфинальных подспектров.*

3.12. Следствие (спектральная теорема Е. В. Щепина о гомеоморфизме). *Гомеоморфизм двух бикомпактов, разложенных в τ-спектры из бикомпактов веса $\leqslant \tau$ над одним и тем же направленным множеством, порождается изоморфизмом их замкнутых конфинальных подспектров.*

Глава IV
ПРОСТРАНСТВА ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВ

§ 1. Верхний и нижний пределы последовательности множеств

1.1. Мы будем рассматривать обобщенные последовательности. Для этого зафиксируем множество A, элементы которого будут индексами наших последовательностей, и направленную систему [1] $\mathscr{F}$ (непустых) подмножеств множества A (см. I.4.8).

В случае обычных последовательностей множество A есть множество натуральных чисел, а система $\mathscr{F}$ совпадает с множеством всех множеств вида $\{n, n+1, \ldots\}$.

Функцию, определенную на множестве A, назовем (обобщенной) последовательностью [2]. Пусть X — топологическое пространство, φ — последовательность, элементами которой являются подмножества пространства X. Пусть в этой последовательности индексу α сопоставляется множество X_α. Пишем: $\varphi = \{X_\alpha \colon \alpha \in \mathrm{A}\}$.

Верхним пределом последовательности φ по направленной системе $\mathscr{F}$ называется множество всех точек x пространства X, удовлетворяющих условию:

для любой окрестности Ox точки x в пространстве X и любого элемента F системы $\mathscr{F}$ найдется индекс $\alpha \in F$, для которого $X_\alpha \cap Ox \neq \varnothing$.

---

[1] Не путать с направлением, см. III.2.6.

[2] Внимание: часто термин «обобщенная последовательность» употребляется в более узком смысле.

Нижним пределом последовательности φ по направленной системе $\mathscr{F}$ называется множество всех точек x пространства X, удовлетворяющих условию:

для любой окрестности Ox точки x в пространстве X найдется такой элемент F системы $\mathscr{F}$, что $X_\alpha \cap Ox \neq \varnothing$ для любого $\alpha \in F$.

Верхний и нижний пределы обозначаются соответственно $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$ с добавлением справа символа последовательности или ее общего члена, а снизу — символа системы $\mathscr{F}$ или заменяющих его обозначений: $n \to \infty$ для обычных последовательностей, $x \to x_0$, когда множество A является топологическим пространством, а система $\mathscr{F}$ есть множество всех окрестностей точки $x_0 \in A$ (окрестности можно брать из некоторой базы в точке x_0 — понятия оказываются эквивалентными) [1].

1.2. Пример. Пусть X — обычная евклидова плоскость, представленная в виде произведения двух прямых: $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Обозначим A_n, $n = 1, 2, \ldots$, множество $\{2^{-n}\} \times [0, 1 + 2^{-n}]$, если n четно, и множество $\{2^{-n}\} \times [0, 2]$, если n нечетно. Обозначим B_n, $n = 1, 2, \ldots$, множество $\{2^{-n}\} \times [0, \infty)$, если n четно, и множество $\{2^{-n}\} \times [n, \infty)$, если n нечетно. Для последовательностей $\varphi = \{A_n : n = 1, 2, \ldots\}$ и $\psi = \{B_n : n = 1, 2, \ldots\}$ имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{0\} \times [0, 2], \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \{0\} \times [0, 1],$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} B_n = \{0\} \times [0, \infty), \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} B_n = \varnothing.$$

1.3. Пример. Занумеруем произвольно (но без повторений) рациональные точки действительной прямой $\mathbb{R}$: $\mathbb{R} = \{r_n : n = 1, 2, \ldots\}$.

Тогда $\overline{\lim_{n\to\infty}} r_n = \mathbb{R}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} r_n = \varnothing$.

1.4. Замечание. Очевидно, нижний предел последовательности лежит в ее верхнем пределе.

1.5. Предложение. *Пусть $f : X \to Y$ — отображение топологического пространства X в бикомпакт Y и $x_0 \in X$.*

---

[1] Внимание: часто тот же символ $x \to x_0$ употребляют для обозначения предела по системе проколотых окрестностей точки x_0.

Отображение f непрерывно в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Доказать самим.

1.6. Теорема. *Пусть X_0 — замкнутое подмножество регулярного пространства X, $\{X_\alpha \colon \alpha \in \mathrm{A}\}$ — последовательность подмножеств пространства X и*

(*) для любой окрестности U множества X_0 в пространстве X найдется такой элемент F системы $\mathscr{F}$, что $X_\alpha \subset U$ для любого индекса $\alpha \in F$.

Тогда $\overline{\lim\limits_{\mathscr{F}}}\{X_\alpha \colon \alpha \in \mathrm{A}\} \subset X_0$.

Доказать самим.

1.7. Теорема. *Пусть X_0 — подмножество топологического (пространства) X, $\{X_\alpha \colon \alpha \in \mathrm{A}\}$ — последовательность подмножеств пространства X и*

(*) для любого открытого подмножества U пространства X, пересекающего множество X, найдется такой элемент F системы $\mathscr{F}$, что $X_\alpha \cap U = \varnothing$ для любого индекса $\alpha \in$ $\in F$.

Тогда $X_0 \subset \underline{\lim\limits_{\mathscr{F}}}\{X_\alpha \colon \alpha \in \mathrm{A}\}$.

Доказать самостоятельно.

1.8. Теорема. *Пусть $\{X_\alpha \colon \alpha \in \mathrm{A}\}$ — последовательность подмножеств бикомпакта X. Тогда множество $X_0 =$ $= \overline{\lim\limits_{\mathscr{F}}}\{X_\alpha \colon \alpha \in \mathrm{A}\}$ удовлетворяет условию (*) теоремы* 1.6.

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность. множества X_0 в бикомпакте X. Тогда любая точка x множества $X \setminus U$ не принадлежит верхнему пределу рассматриваемой последовательности и поэтому для нее найдется окрестность Ox и множество $F(x) \in \mathscr{F}$ такие, что $X_\alpha \cap Ox = \varnothing$ для любого индекса $\alpha \in F(x)$. Из открытого покрытия $\{Ox \colon x \in X \setminus U\}$ замкнутого подмножества $X \setminus U$ бикомпакта X выберем конечное подпокрытие $\{Ox_1, \dots, Ox_n\}$ (предложение I.4.10). Возьмем любой элемент F системы $\mathscr{F}$, лежащий в пересечении множеств $F(x_1), \dots, F(x_n)$. Если $\alpha \in F$, то $X_\alpha \cap Ox_i = \varnothing$ для любого $i =$

$= 1, \ldots, n$ и поэтому

$$X_\alpha \cap (X \setminus U) \subset X_\alpha \cap \Bigl(\bigcup_{i=1}^{n} Ox_i\Bigr) = \bigcup_{i=1}^{n} (X_\alpha \cap Ox_i) = \varnothing,$$

т. е. $X_\alpha \subset U$. Теорема доказана.

Существенность условия бикомпактности пространства X в доказанной теореме можно усмотреть на примере последовательности ψ из 1.2.

1.9. Теорема. *Пусть $\{X_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$ — последовательность подмножеств топологического пространства X. Тогда множество $X_0 = \varliminf\limits_{\mathscr{F}}\{X_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$ удовлетворяет условию* (*) *теоремы* 1.7.

Доказать самим.

1.10. Теорема. *Пусть $\{X_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$ и $\{X'_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$ — последовательности подмножеств топологического пространства X. Тогда*

а) *если $X'_\alpha \subset X_\alpha$ при любом $\alpha \in \mathrm{A}$, то*

$$\varlimsup_{\mathscr{F}}\{X'_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\} \subset \varlimsup_{\mathscr{F}}\{X_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$$

и

$$\varliminf_{\mathscr{F}}\{X'_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\} \subset \varliminf_{\mathscr{F}}\{X_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\},$$

б) *если $X_0 \subset X$ и $X_\alpha = X_0$ при любом $\alpha \in \mathrm{A}$, то*

$$\varlimsup_{\mathscr{F}}\{X_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\} = \varliminf_{\mathscr{F}}\{X_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\} = [X_0],$$

в) *если $A^* \subset A$ и $\mathscr{F}^* = \{F \cap A^* : F \in \mathscr{F}\}$ состоит из непустых множеств, то*

$$\varlimsup_{\mathscr{F}^*}\{X_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}^*\} \subset \varlimsup_{\mathscr{F}}\{X_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$$

и

$$\varliminf_{\mathscr{F}}\{X_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\} \subset \varliminf_{\mathscr{F}^*}\{X_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}^*\},$$

г) $\varlimsup\limits_{\mathscr{F}}\{X_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\} = \varlimsup\limits_{\mathscr{F}}\{[X_\alpha] : \alpha \in A\} = [\varlimsup\limits_{\mathscr{F}}\{X_\alpha : \alpha \in A\}]$,
$\varliminf\limits_{\mathscr{F}}\{X_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\} = \varliminf\limits_{\mathscr{F}}\{[X_\alpha] : \alpha \in A\} = [\varliminf\limits_{\mathscr{F}}\{X_\alpha : \alpha \in A\}]$.

Доказательство. Свойства а), б), в) сразу следуют из определений. Докажем г). Если $x \in \varlimsup\limits_{\mathscr{F}}\{[X_\alpha] : \alpha \in \mathrm{A}\}$ (соответственно, если $x \in \underline{\lim}_{\mathscr{F}}\{[X_\alpha]\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$), то для любой окрестности Ox точки x и любого $F \in \mathscr{F}$ (соответственно, для любой окрестности Ox точки x) найдется такой индекс $\alpha \in F$ (соответственно, найдется такое множество $F \in \mathscr{F}$, что для любого $\alpha \in F$), что $[X_\alpha] \cap Ox \neq \varnothing$. Поэтому $X_\alpha \cap Ox \neq \varnothing$ и, таким образом, $x \in \overline{\lim}_{\mathscr{F}}\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$ (соответственно, $x \in \underline{\lim}_{\mathscr{F}}\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$). Мы проверили, что

$$\overline{\lim_{\mathscr{F}}}\{[X_\alpha]\colon \alpha \in A\} \subset \overline{\lim_{\mathscr{F}}}\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$$

и

$$\underline{\lim_{\mathscr{F}}}\{[X_\alpha]\colon \alpha \in A\} \subset \underline{\lim_{\mathscr{F}}}\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}.$$

Обратные включения следуют из а). Из определения верхнего и нижнего пределов следует, что эти множества замкнуты, что дает нам совпадение крайних членов в цепочках равенств в г). Теорема доказана.

1.11. Пусть B — произвольное множество, $\{X_{\alpha\beta}\colon \alpha \in \mathrm{A}, \beta \in B\}$ — семейство подмножеств топологического пространства X. Из пункта а) теоремы 1.10 следует, что

$$\overline{\lim_{\mathscr{F}}}\{\cap\{X_{\alpha\beta}\colon \beta \in B\}\colon \alpha \in \mathrm{A}\} \subset \cap\{\overline{\lim_{\mathscr{F}}}\{X_{\alpha\beta}\colon \alpha \in \mathrm{A}\}\colon \beta \in B\},$$

$$\underline{\lim_{\mathscr{F}}}\{\cap\{X_{\alpha\beta}\colon \beta \in B\}\colon \alpha \in \mathrm{A}\} \subset \cap\{\underline{\lim_{\mathscr{F}}}\{X_{\alpha\beta}\colon \alpha \in \mathrm{A}\}\colon \beta \in B\},$$

$$\cup\{\overline{\lim_{\mathscr{F}}}\{X_{\alpha\beta}\colon \alpha \in \mathrm{A}\}\colon \beta \in B\} \subset \overline{\lim_{\mathscr{F}}}\{\cup\{X_{\alpha\beta}\colon \beta \in B\}\colon \alpha \in \mathrm{A}\},$$

$$\cup\{\underline{\lim_{\mathscr{F}}}\{X_{\alpha\beta}\colon \alpha \in \mathrm{A}\}\colon \beta \in B\} \subset \underline{\lim_{\mathscr{F}}}\{\cup\{X_{\alpha\beta}\colon \beta \in B\}\colon \alpha \in \mathrm{A}\},$$

Читателю полезно представить себе, какой вид примут эти формулы, когда множество B будет состоять из двух элементов. При этом формула, стоящая в этом списке на третьем месте, может быть уточнена, а именно

1.12. Теорема. *В обозначениях теоремы* 1.10

$$\overline{\lim_{\mathscr{F}}}\{X_\alpha \cup X'_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\} = \overline{\lim_{\mathscr{F}}}\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\} \cup \overline{\lim_{\mathscr{F}}}\{X'_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}.$$

Доказательство. В силу сделанного замечания нам остается проверить, что если точка x не принадлежит множеству

$$\overline{\lim_{\mathscr{F}}}\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\} \cup \overline{\lim_{\mathscr{F}}}\{X'_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\},$$

то она не принадлежит и множеству

$$\overline{\lim_{\mathscr{F}}}\{X_\alpha \cup X'_\alpha \colon \alpha \in \mathrm{A}\}.$$

Из определения верхнего предела следует, что найдутся такие окрестности Ox и $O'x$ точки x в пространстве X и множества $F, F' \in \mathscr{F}$, что $X_\alpha \cap Ox = \varnothing$ при любом $\alpha \in F$ и $X'_\alpha \cap O'x = \varnothing$ при любом $\alpha \in F'$. Зафиксируем $F_0 \in \mathscr{F}$, лежащее в пересечении множеств F и F', и положим $U = Ox \cap O'x$. Если $\alpha \in F_0$, то $X_\alpha \cap U \subset X_\alpha \cap Ox = \varnothing$ и $X'_\alpha \cap U \subset X'_\alpha \cap O'x = \varnothing$. Поэтому $(X_\alpha \cup X'_\alpha) \cap U = \varnothing$, а это значит, что $x \notin \overline{\lim_{\mathscr{F}}}\{X_\alpha \cup X'_\alpha \colon \alpha \in A\}$. Теорема доказана.

§ 2. Предел сходящейся последовательности множеств

2.1. Верхний и нижний пределы определены в 1.1 для любой последовательности множеств, хотя в общем случае значением любого из них может оказаться пустое множество. Последовательность называется сходящейся (к множеству X_0), если ее верхний и нижний пределы совпадают (и равны множеству X_0). В этом случае множество X_0 называется (топологическим) пределом рассматриваемой последовательности. Для предела последовательности используется символ lim с добавлением обозначений последовательности и системы $\mathscr{F}$, как это делается для верхнего и нижнего пределов.

Формулы §1 автоматически переносятся на пределы последовательностей, но только в тех случаях, когда фигурирующие в них последовательности являются сходящимися. Но, как и в случае сходящихся числовых последовательностей, из сходимости одних последовательностей часто следует сходимость других. Пусть последовательности $\{X_\alpha \colon \alpha \in A\}$ и $\{X'_\alpha \colon \alpha \in \in \mathrm{A}\}$ подмножеств топологического пространства X сходятся. В нижеследующих формулах, употребляя символ lim для других последовательностей, тем самым утверждаем, что их сходимость следует из сходимости этих двух последовательностей.

Из 1.10 г) получаем

$$\lim_{\mathscr{F}}\{[X_\alpha] \colon \alpha \in A\} = \lim_{\mathscr{F}}\{X_\alpha \colon \alpha \in A\} = \left[\lim_{\mathscr{F}}\{X_\alpha \colon \alpha \in A\}\right].$$

Из последней формулы 1.11, замечания 1.4 и теоремы 1.12 получаем

$$\lim_{\mathscr{F}}\{X_\alpha \cup X'_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\} = \lim_{\mathscr{F}}\{X_\alpha\colon \alpha \in A\} \cup \lim_{\mathscr{F}}\{X'_\alpha\colon \alpha \in A\}.$$

Для случаев возрастающей и убывающей последовательностей имеет место

2.2. Теорема. *Пусть* $\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — *последовательность подмножеств топологического пространства* X. *Тогда*

а) *если для любого индекса* $\alpha \in A$ *найдется такое множество* $F \in \mathscr{F}$, *что* $X_\alpha \subset X_\beta$ *для любого индекса* $\beta \in F$, *то последовательность сходится и* $\lim_{\mathscr{F}}\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\} = [\cup\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}]$,

б) *если для любого индекса* $\alpha \in \mathrm{A}$ *найдется такое множество* $F \in \mathscr{F}$, *что* $X_\beta \subset X_\alpha$ *для любого индекса* $\beta \in F$, *то последовательность сходится и* $\lim_{\mathscr{F}}\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\} = \cap\{[X_\alpha]\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$.

Доказать самим.

2.3. Отметим также случай стационарной последовательности. Пусть $X_0 \subset X$ и $X_\alpha = X_0$ для любого индекса $\alpha \in \mathrm{A}$. Тогда $\lim_{\mathscr{F}}\{X_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\} = [X_0]$ (см. 1.10 б)).

§ 3. Топология Вьеториса

3.1. Наша ближайшая цель — введение топологии, «соответствующей» понятию сходимости последовательностей множеств, рассмотренному в предыдущем параграфе. Первая из формул 2.1 подсказывает нам, что точками определяемого нами топологического пространства должны быть замкнутые подмножества пространства X.

Множество всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства X обозначим $\exp X$, а для $X_0 \subset X$ обозначим $\exp(X_0, X)$ множество всех непустых подмножеств множества X_0, замкнутых в пространстве X.

Укажем установленные нами свойства сходящихся последовательностей множеств, которые послужат отправной точкой при введении топологии на множестве $\exp X$.

Если X_0 — замкнутое подпространство пространства X, то в соответствии с 1.9 множество $\exp(X_0, X)$ должно быть замкнутым.

Пусть X_0 — открытое подпространство пространства X. Множество $\exp X \setminus \exp(X_0, X)$ состоит из тех замкнутых в пространстве X множеств, которые не лежат целиком в множестве X_0, т. е. пересечение которых с множеством $X \setminus X_0$ непусто. Отправляясь от теоремы 1.8, требуем, чтобы множество $\exp X \setminus \exp(X_0, X)$ было замкнутым, а множество $\exp(X_0, X)$, соответственно, открытым.

Назовем топологией Виеториса на множестве $\exp X$ наименьшую из топологий, удовлетворяющих этим условиям, т. е. наименьшую из топологий, в которых множество $\exp(X_0, X)$ замкнуто для любого замкнутого и открыто для любого открытого подпространства X_0 пространства X. Для определенного таким образом пространства сохраним обозначение $\exp X$ и примем название «пространство замкнутых подмножеств».

3.2. Для $U_1, \ldots, U_n \subset X$ положим

$$O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle = \{F\colon F \in \exp X, F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_n, F \cap U_1 \neq \varnothing, \ldots$$

$$\ldots, F \cap U_n \neq \varnothing\} = \{F\colon F \in \exp X, F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_n\} \cap$$

$$\cap \, (\bigcap_{i=1}^{n} \{F\colon F \in \exp X, F \cap U_i \neq \varnothing\}).$$

Если множества $U_1, \ldots, U_n$ открыты, то множества

$$\{F\colon F \in \exp X, F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i\} = \exp(\bigcup_{i=1}^{n} U_i, X),$$

$$\{F\colon F \in \exp X, F \cap U_i \neq \varnothing\} = \exp X \setminus \exp(X \setminus U_i, X)$$

открыты в пространстве замкнутых подмножеств по определению топологии Виеториса, поэтому открытым является множество $O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. С другой стороны, такой вид имеют и элементы предбазы, указанной нами при определении топологии Виеториса: $\exp(U, X) = O\langle U\rangle$, $\exp X \setminus \exp(X \setminus U, X) = O\langle U, X\rangle$.

Таким образом, семейство всех множеств вида $O\langle U_1, \dots, U_n\rangle$, где множества $U_1, \dots, U_n$ открыты в пространстве X, является предбазой топологии Виеториса.

На самом деле это семейство — база топологии Виеториса. Чтобы убедиться в этом, надо проверить выполнение условия б) из I.1.21. Пусть $F \in O\langle U_1, \dots, U_m\rangle \cap O\langle V_1, \dots, V_n\rangle$. Положив $\gamma = \{U_i \cap V_j : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, U_i \cap V_j \cap F \neq \varnothing\}$, перенумеруем семейство γ: $\gamma = \{W_1, \dots, W_k\}$. Оставляем читателю доказательство того, что

$$F \in O\langle W_1, \dots, W_k\rangle \subset O\langle U_1, \dots, U_m\rangle \cap O\langle V_1, \dots, V_n\rangle,$$

что завершает рассуждение.

3.3. Теорема. *Пусть множество X_0 лежит в T_1-пространстве X. Тогда*

а) $[\exp(X_0, X)] = \exp([X_0], X)$,

б) $\langle \exp(X_0, X)\rangle = \exp(\langle X_0\rangle, X)$.

Доказательство. Очевидно, что $\exp(X_0, X) \subset \exp([X_0], X)$. По определению топологии Виеториса множество $\exp([X_0], X)$ замкнуто. Оно содержит множество $\exp(X_0, X)$ и в соответствии с определением замыкания множества, данным в I.1.6, из этого следует, что $[\exp(X_0, X)] \subset \exp([X_0], X)$.

Таким образом, для получения а) надо доказать противоположное включение

$$(*)\ \exp([X_0], X) \subset [\exp(X_0, X)].$$

Пусть $F_0 \in \exp([X_0], X)$ и $O\langle U_1, \dots, U_n\rangle$ — произвольная окрестность точки F_0 в пространстве $\exp X$. Имеем $F_0 \subset [X_0]$ и $U_i \cap F_0 \neq \varnothing$ для любого $i = 1, \dots, n$. Поэтому найдется точка $x_i \in U_i \cap X_0$ (предложение I.1.10). Положим $F = \{x_1, \dots, x_n\}$. Имеем $F \in \exp(X_0, X) \cap O\langle U_1, \dots, U_n\rangle$, т.е. $\exp(X_0, X) \cap O\langle U_1, \dots, U_n\rangle \neq \varnothing$.

Отсюда ввиду произвольности окрестности $O\langle U_1, \dots, U_n\rangle$ точки F_0 и произвольности самой точки $F_0 \in \exp([X_0], X)$ следует $(*)$, что завершает доказательство а).

Очевидно, $\exp(\langle X_0\rangle, X) \subset \exp(X_0, X)$. По определению топологии Виеториса множество $\exp(\langle X_0\rangle, X)$ открыто. Оно лежит в множестве $\exp(X_0, X)$, и поэтому в силу определения внутренности множества, данного в I.1.6,

$$\langle \exp(X_0, X)\rangle \supset \exp(\langle X_0\rangle, X).$$

Таким образом, надо доказать противоположное включение

$$\langle \exp(X_0, X)\rangle \subset \exp(\langle X_0\rangle, X)$$

или, что из $F_0 \in \exp X \setminus \exp(\langle X_0\rangle, X)$ следует, что $F_0 \notin \notin \langle \exp(X_0, X)\rangle$.

Но из $F_0 \in \exp X \setminus \exp(\langle X_0\rangle, X)$ получаем, что

$$F_0 \not\subset \langle X_0\rangle, F_0 \cap [X \setminus X_0] \neq \varnothing.$$

Зафиксируем точку $x_0 \in F_0 \cap [X \setminus X_0]$. Пусть $O\langle U_1, \dots, U_n\rangle$ — произвольная окрестность точки F_0 в пространстве $\exp X$. При некотором $i = 1, \dots, n$ $x_0 \in U_i$. В силу принадлежности $x_0 \in \in [X \setminus X_0]$ найдется точка $x_1 \in (X \setminus X_0) \cap U_i$. Положим $F_1 = F_0 \cup \cup \{x_1\}$. Очевидно, $F_1 \notin \exp(X_0, X)$ и $F_1 \in O\langle U_1, \dots, U_n\rangle$. Таким образом, любая окрестность точки F_0 пересекается с множеством $\exp X \setminus \exp(X_0, X)$, а это означает, что $F_0 \notin \langle \exp(X_0, X)\rangle$, что и требовалось для завершения доказательства б). Теорема доказана.

3.4. Теорема. *Пусть X есть T_1-пространство и $X_0 \subset \subset X$. Тогда множество $\{F\colon F \in \exp X, X_0 \subset F\}$ замкнуто в пространстве $\exp X$.*

Доказательство. Если множество X_0 состоит из одной точки, то множество $\{F\colon F \in \exp X, X_0 \subset F\} = \{F\colon F \in \in \exp X, X_0 \cap F \neq \varnothing\}$ замкнуто по определению топологии Виеториса.

В случае произвольного множества X_0

$$\{F\colon F \in \exp X, X_0 \subset F\} = \bigcap_{x \in X_0} \{F\colon F \in \exp X, x \in F\}.$$

В правой части этого равенства стоит пересечение семейства множеств, замкнутость которых установлена на первом шаге доказательства. Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

3.5. Теорема. *Если X есть T_1-пространство, то и пространство $\exp X$ есть T_1-пространство.*

Доказательство. Пусть $F_0 \in \exp X$. Положим $A = \{F\colon F \in \exp X, F_0 \subset F\}, B = \{F\colon F \in \exp X, F \subset F_0\}$.

По теореме 3.4 множество A замкнуто. По определению топологии Виеториса множество B замкнуто. Из равенства $\{F_0\} = A \cap B$ следует замкнутость множества $\{F_0\}$. Замкнутость одноточечных подмножеств и означает, что пространство $\exp X$ является T_1-пространством (см. I.2.2). Теорема доказана.

3.6. Теорема. *Пусть X есть T_1-пространство. Пространство X регулярно тогда и только тогда, когда пространство* $\exp X$ *хаусдорфово.*

Доказательство. Покажем сначала, что если пространство X регулярно, то пространство $\exp X$ хаусдорфово. Пусть F_1 и F_2 — две различные точки пространства $\exp X$, т.е. различные замкнутые подмножества пространства X. Тогда по крайней мере одно из множеств $F_2 \setminus F_1$ или $F_1 \setminus F_2$ непусто. Положим для определенности, что непусто первое из этих множеств и зафиксируем точку $x \in F_2 \setminus F_1$. Существуют непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F_1 соответственно. Положим $V_1 = O\langle V\rangle$ и $U_1 = O\langle U\rangle$, если $F_2 = \{x\}, U_1 = O\langle U, X \setminus \{x\}\rangle$, если $F_2 \neq \{x\}$. Тогда, очевидно, $F_1 \in V_1$, $F_2 \in U_1$ и $V_1 \cap U_1 = \varnothing$, чем доказана хаусдорфовость пространства $\exp X$.

Покажем теперь, что если пространство $\exp X$ хаусдорфово, то X — регулярно. Пусть замкнутое подмножество F_0 пространства X не содержит точку $x_0 \in X$. Множества $\{x_0\} \cup F_0$ и F_0 различны как элементы пространства $\exp X$, и в силу хаусдорфовости последнего найдутся непересекающиеся окрестности $O\langle U_1, \dots, U_m\rangle$ и $O\langle V_1, \dots, V_n\rangle$ точек $\{x_0\} \cup F_0$ и F_0 соответственно в пространстве $\exp X$. Так как множество $\{x_0\} \cup F_0$ лежит в объединении $U_1 \cup \dots \cup U_m$, то при некотором $i = 1, \dots, m$ $x_0 \in U_i$. Положим $U = \cap\{U_i\colon i = 1, \dots, m, x_0 \in U_i\}$. Из того, что точка F_0 принадлежит, а точка $\{x_0\} \cup F_0$ не принадлежит множеству $O\langle V_1, \dots, V_n\rangle$, следует, что $x_0 \notin V_i$ при любом $i = 1, \dots, n$. Покажем большее, а именно, что $U \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i) = \varnothing$. Допустив противное, получим существование индекса $j = 1, \dots, n$ и точки $x \in U \cap V_j$. Но в этом случае множество $F = \{x\} \cup F_0$ принадлежит пересечению $O\langle V_1, \dots, V_n\rangle \cap O\langle U_1, \dots, U_m\rangle$, которое, по нашим предположениям, пусто. Таким образом, множества U и $V = V_1 \cup$

$\cup \ldots \cup V_n$ не пересекаются. Первое содержит точку x_0, второе — множество F_0. Ввиду произвольности замкнутого множества F_0 и точки $x_0 \notin F_0$ это означает регулярность пространства X.

3.7. Лемма. *Пусть $\{U_1, \ldots, U_n\}$ и $\{V_1, \ldots, V_n\}$ — два семейства открытых в T_1-пространстве X множеств и $[V_i] \subset \subset U_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Тогда $[O\langle V_1, \ldots, V_n\rangle] \subset O\langle U_1, \ldots \ldots, U_n\rangle$.*

Доказательство. Используя 3.3 и I.1.8 и учитывая, что замыкание пересечения семейства множеств содержится в пересечении замыканий элементов этого семейства, получаем

$$[O\langle V_1, \ldots, V_n\rangle] = [\exp(\bigcup_{i=1}^{n} V_i, X) \cap \bigcap_{i=1}^{n} (\exp X \setminus \exp(X \setminus V_i, X))] \subset$$

$$\subset [\exp(\bigcup_{i=1}^{n} V_i, X)] \cap \bigcap_{i=1}^{n} [(\exp X \setminus \exp(X \setminus V_i, X))] \subset$$

$$\subset \exp([\bigcup_{i=1}^{n} V_i], X) \cap \bigcap_{i=1}^{n} (\exp X \setminus \exp(\langle X \setminus V_i\rangle, X)) \subset$$

$$\subset \exp(\bigcup_{i=1}^{n} U_i, X) \cap \bigcap_{i=1}^{n} (\exp X \setminus \exp(X \setminus U_i, X)) = O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle.$$

3.8. Теорема. *Пусть X есть T_1-пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *пространство X нормально,*

б) *пространство $\exp X$ вполне регулярно,*

в) *пространство $\exp X$ регулярно.*

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Пусть $F_0 \in O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. Семейство $\{U_1, \ldots, U_n, X \setminus F_0\}$ является открытым покрытием пространства X. По II.5.4 существуют замкнутые подмножества $\{F_1, \ldots, F_n, F_{n+1}\}$ пространства X, которые покрывают пространство X и удовлетворяют условиям

$$F_1 \subset U_1, \ldots, F_n \subset U_n, F_{n+1} \subset X \setminus F_0.$$

Кроме того, можно дополнительно предположить, что каждое из множеств $F_1, \ldots, F_n$ пересекается с множеством F_0: если это не выполнено, заменим соответствующее множество F_i на множество $F_i \cup \{x\}$, где x — произвольная точка пересечения $F_0 \cap U_i$.

Пользуясь леммой Урысона I.2.18, строим непрерывные функции $f_i\colon X \to [0,1]$, $i = 1, \ldots, n$, которые удовлетворяют условиям:

функция f_i на множестве F_i тождественно равна нулю, а на множестве $X \setminus U_i$ — единице.

Пусть для $r \in [0, \infty)$ и $i = 1, \ldots, n$

$$V_i^r = \{x\colon x \in X, f_i(x) < r\}, \quad W_r = O\langle V_1^r, \ldots, V_n^r\rangle.$$

Если $q, r \in [0,1]$ и $q < r$, то по лемме 3.7 $[W_q] \subset W_r$. Предложение I.2.17 позволяет построить непрерывную функцию $g\colon \exp X \to [0,1]$, принимающую значение 0 в точке F_0 и 1 на множестве $\exp X \setminus O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$.

б) $\Rightarrow$ в). Очевидно.

в) $\Rightarrow$ а). Пусть F_0 и F_1 — непустые замкнутые непересекающиеся подмножества пространства X. По определению топологии Виеториса множество $W = \exp(X \setminus F_1, X)$ открыто в пространстве $\exp X$. Оно содержит точку $F_0 \in \exp X$. В силу регулярности пространства $\exp X$ найдется окрестность $O\langle U_1, \ldots$ $\ldots, U_n\rangle$ этой точки, замыкание которой лежит в множестве W. Таким образом, $F_0 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. Нам осталось показать, что $[\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i] \cap$ $\cap F_1 = \varnothing$. Допустим, что это не так. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{n}([U_i] \cap F_1) = (\bigcup_{i=1}^{n}[U_i]) \cap F_1 = [\bigcup_{i=1}^{n} U_i] \cap F_1 \neq \varnothing$$

и найдется по крайней мере один индекс $j = 1, \ldots, n$, при котором $[U_j] \cap F_1 \neq \varnothing$. Для каждого индекса $i = 1, \ldots, n$ выберем по точке $x_i \in [U_i]$, если $i \neq j$ и $x_i \in [U_i] \cap F_1$, если $i = j$. Пусть $F = \{x_i\colon i = 1, \ldots, n\}$. Как легко видеть, любая окрестность точки F в пространстве $\exp X$ содержит точки, принадлежащие множеству $O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$, поэтому $F \in [O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle] \subset W =$ $= \exp(X \setminus F_1, X)$. Но $F \cap F_1 \neq \varnothing$. Полученное противоречие показывает, что $[\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i] \cap F_1 = \varnothing$, и, таким образом, множество $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ является окрестностью множества F_0, замыкание которой не пересекается с множеством F_1. Ввиду произвольности непустых дизъюнктных подмножеств F_0 и F_1 пространства X это означает кормальность пространства X. Теорема доказана.

3.9. Теорема. *Пусть пространство X регулярно, $\{F_n\colon n = 1,2,\ldots\}$ — последовательность элементов пространства* $\exp X$, *сходящаяся в топологии Виеториса к бикомпактному множеству $F \in \exp X$, и для $n = 1,2,\ldots$, $x_n \in F_n$. Тогда $\varnothing \neq \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \subset F$.*

Доказательство. Покажем прежде всего, что $(\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n) \cap \cap F \neq \varnothing$. Допустим противное. Тогда в силу регулярности пространства X для каждой точки $x \in F$ найдутся такая окрестность Ox и такой номер $n(x)$, что $x_n \notin Ox$ при $n \geqslant n(x)$. Из покрытия $\{Ox\colon x \in F\}$ бикомпакта F выберем конечное подпокрытие $\{Ox_1^*, \ldots, Ox_m^*\}$. Положим

$$n_0 = \max\{n(x_1^*), \ldots, n(x_m^*)\}, V = \bigcup_{i=1}^{m} Ox_i^*.$$

Если теперь $n \geqslant n_0$, то

$$F_n \setminus V = F_n \setminus \bigcup_{i=1}^{m} Ox_i^* = \bigcap_{i=1}^{m} (F_n \setminus Ox_i^*) \ni x_n$$

и, следовательно, $F_n \notin O\langle V\rangle$, а это в силу принадлежности $F \in \in O\langle V\rangle$ противоречит сходимости $F_n \to F$, что и дает требуемое.

Допустим теперь, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \not\subset F$. Зафиксируем точку $t \in \in (\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n) \setminus F$ и ее окрестность Ot, замыкание которой не пересекается с бикомпактом F. Перейдем к подпоследовательности $\{x_{n_k}\colon k = 1,2,\ldots\}$ нашей последовательности, состоящей из точек, принадлежащих множеству Ot. Ясно, что $\varlimsup\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \subset \subset [Ot]$, и поэтому $(\varlimsup\limits_{k\to\infty} x_{n_k}) \cap F = \varnothing$, что противоречит факту, установленному в первой части доказательства (применительно к последовательности $\{x_{n_k}\colon k = 1,2,\ldots\}$). Таким образом, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \subset F$. Теорема доказана.

3.10. Теорема. *Пусть X — метрическое пространство, $\{F_n\colon n = 1,2,\ldots\}$ — последовательность элементов пространства* $\exp X$, *сходящаяся в топологии Виеториса к множеству $F \in \exp X$ и $x \in F$. Тогда существует последовательность $\{x_n\colon n = 1,2,\ldots\}$ точек пространства X, $x_n \in F_n$ при $n = 1,2,\ldots$, сходящаяся к точке x.*

Доказательство. Построим по индукции последовательность целых чисел $\{n(k)\colon k = 0, 1, 2, \ldots\}$. Положим $n(0) = 1$. Пусть выбраны числа $n(0), \ldots, n(k-1)$. Возьмем в качестве $n(k)$ любое число $i > n(k-1)$, для которого $F_j \cap O_{1/k}x \neq \varnothing$ при любом $j \geqslant i$. Это возможно в силу равенства $F = \varliminf\limits_{n\to\infty} F_n$, следующего из сходимости $F_n \to F$, и теоремы 1.9 (или из того, что множество $O\langle O_{1/k}x, X\rangle$ является окрестностью точки F в пространстве $\exp X$). Пусть $n(k) \leqslant n < n(k+1)$. Возьмем в качестве x_n любую точку множества F_n при $k = 0$ и любую точку пересечения $F_n \cap O_{1/k}x$ при $k \geqslant 1$. Как легко видеть, последовательность $\{x_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ удовлетворяет поставленным условиям. Теорема доказана.

3.11. Теорема. *Пусть X — регулярное пространство, $\{K_n\colon n = 1, 2, \ldots\} \cup \{F_n\colon n = 1, 2, \ldots\} \subset \exp X$, $K_n \subset F_n$ при $n = 1, 2, \ldots$, $K_n \to K_0$, $F_n \to F_0$ в топологии Виеториса. Тогда $K_0 \subset F_0$.*

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность множества F_0 в пространстве X. Множество $O\langle U\rangle$ является окрестностью точки F_0 в пространстве $\exp X$. В силу сходимости $F_n \to F_0$ найдется такое целое число N, что $F_n \subset U$ при $n \geqslant N$, поэтому

$$K_n \subset [U]. \tag{$*$}$$

По теореме 3.3 множество $\exp([U], X)$ замкнуто в пространстве $\exp X$, поэтому точка K_0, будучи предельной для последовательности $\{K_n\colon n = N, N+1, \ldots\}$, в силу $(*)$ принадлежит множеству $\exp([U], X)$, т.е. $K_0 \subset [U]$. Ввиду произвольности окрестности U множества F_0 это означает, что $K_0 \subset F_0$. Теорема доказана.

§ 4. Пространство $\exp_k X$

4.1. Пусть X — топологическое пространство. Обозначим $\exp_k X$ множество всех непустых замкнутых подмножеств пространства X мощности, не превосходящей кардинального числа k. Если при этом кардинальное число k не меньше мощности пространства X, то $\exp_k X = \exp X$. Но при любом k имеет место включение $\exp_k X \subset \exp X$ и можно рассматривать множество

$\exp_k X$ в качестве подпространства пространства $\exp X$, что мы и будем делать.

4.2. Лемма. *Пусть* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *— конечное семейство попарно различных точек хаусдорфова пространства* X. *Тогда существуют попарно не пересекающиеся окрестности* $V_1, \ldots, V_n$ *этих точек, такие, что* $x_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказать самим.

Из этой леммы легко выводится

4.3. Теорема. *Пусть* X *— хаусдорфово пространство,* k *— натуральное число. Тогда пространство* $\exp_k X$ *замкнуто в пространстве* $\exp X$.

Доказать самим.

4.4. Замечание. Как легко видеть, если X есть T_1-пространство, то отображение $i\colon X \to \exp X$, сопоставляющее точке $x \in X$ одноточечное множество $i(x) = \{x\}$, является вложением, т. е. рассматриваемое как отображение на множество $\exp_1 X$ оно является гомеоморфизмом.

4.5. Замечание. Для хаусдорфова пространства X имеем цепочку вложений: $\exp_1 X \subset \exp_2 X \subset \ldots \subset \exp X$. Из теоремы 4.3 следует, что если $m \geqslant k$, то пространство $\exp_k X$ замкнуто в пространстве $\exp_m X$.

4.6. Теорема. *Если* X *есть* T_1*-пространство и пространство* $\exp_1 X$ *замкнуто в пространстве* $\exp_2 X$, *то* X *хаусдорфово.*

Доказать самим.

§ 5. Пространство замкнутых подмножеств бикомпакта

5.1. Теорема. *Если пространство* X *— бикомпакт, то и пространство* $\exp X$ *также является бикомпактом.*

Доказательство. Хаусдорфовость пространства $\exp X$ следует из теоремы 3.6.

В 3.2 отмечалось, что множества вида $O\langle U\rangle$ и $O\langle U, X\rangle$ составляют предбазу топологии Виеториса. Пусть γ — покрытие пространства $\exp X$, состоящее из элементов этой предбазы. В силу леммы Александера I.4.20 для доказательства бикомпактности достаточно показать, что из покрытия γ можно выделить конечное подпокрытие. Пусть $\Phi = X \setminus \cup\gamma_1$, где $\gamma_1 = \{V : O\langle V, X\rangle \in \gamma\}$. Если $\Phi = \varnothing$, то из покрытия γ_1 бикомпакта X выберем конечное подпокрытие $\{V_1, \ldots, V_n\}$. Тогда семейство $\{O\langle V_1, X\rangle, \ldots, O\langle V_n, X\rangle\}$ покрывает пространство $\exp X$: любое множество $F \in \exp X$ пересекается с некоторым множеством V_i, т.е. $F \in O\langle V_i, X\rangle$. Если $\Phi \neq \varnothing$, то из того, что семейство γ покрывает пространство $\exp X$, а множество Φ не пересекается ни с одним элементом семейства γ_1 следует, что при некотором U $O\langle U\rangle \in \gamma$ и $\Phi \subset U$. Из покрытия γ_1 замкнутого подмножества $X \setminus U$ бикомпакта X выберем конечное подпокрытие $\{V_1, \ldots, V_n\}$. Семейство $\{O\langle U\rangle, O\langle V_1, X\rangle, \ldots, O\langle V_n, X\rangle\}$ покрывает пространство $\exp X$: если множество $F \in \exp X$ не принадлежит ни одному из множеств $O\langle V_1, X\rangle, \ldots, O\langle V_n, X\rangle$, то $F \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i) = \varnothing$ и, следовательно, $F \subset U$, $F \in O\langle U\rangle$. Теорема доказана.

5.2. Следствие. *Если пространство X — бикомпакт, а k — натуральное число, то пространство $\exp_k X$ также является бикомпактом.*

5.3. Теорема. *Если X — бикомпакт бесконечного веса τ, то вес бикомпакта $\exp X$ также равен τ.*

Доказательство. Вес бикомпакта $\exp X$ не меньше τ — это следует из замечания 4.4. Пусть β — какая-нибудь база бикомпакта X мощности τ. Семейство множеств вида $O\langle U_1, \ldots, U_m\rangle$, где $U_1, \ldots, U_m \in \beta$, составляет базу бикомпакта $\exp X$: пусть $O\langle V_1, \ldots, V_n\rangle$ — произвольная виеторисовская окрестность (см. 3.2) произвольной точки F бикомпакта $\exp X$. Поскольку β — база, а пространство X бикомпактно, существует такой конечный набор $U_1, \ldots, U_{m+n} \in \beta$, что $U_i \cap F \neq \varnothing$ при $i = 1, \ldots, m$, а семейство $\{U_1, \ldots, U_{m+n}\}$ вписано в $\{V_1, \ldots, V_n\}$, $U_i \subset V_i$ при $i = 1, \ldots, n$; тогда $F \in O\langle U_1, \ldots, U_{m+n}\rangle \subset O\langle V_1, \ldots, V_n\rangle$. Мощность этой базы пространства $\exp X$ не больше τ. Теорема доказана.

5.4. Следствие. *В обозначениях теоремы 5.3 для любого натурального числа k вес бикомпакта $\exp_k X$ равен τ.*

§ 6. Пространство бикомпактных подмножеств

6.1. Можно считать, что бикомпакты, тем более (метризуемые) компакты, — «очень хорошие» по своим топологическим свойствам пространства. Так, в теореме 5.1 доказано, что пространство замкнутых подмножеств бикомпакта является бикомпактом. С другой стороны, если пространство не бикомпактно, то при переходе к пространству замкнутых подмножеств регулярность переходит в хаусдорфовость (теорема 3.6), нормальность — в регулярность (теорема 3.8). Оказывается, что сохранение хороших топологических свойств при переходе к пространству замкнутых подмножеств в случае бикомпакта связана не столько с ограничениями на все пространство X, сколько с тем, что в этом случае бикомпактными оказываются элементы пространства $\exp X$.

6.2. Обозначим $\exp_c X$ множество всех бикомпактных замкнутых подмножеств пространства X. Рассмотрим его в качестве подпространства пространства $\exp X$.

При рассмотрении пространства $\exp_c X$ используем обозначение $O\langle U_1, \dots, U_n\rangle$ для множеств, являющихся пересечениями множеств пространства $\exp X$, обозначившихся этим символом с подпространством $\exp_c X$.

6.3. Теорема. *Пусть пространство X регулярно. Тогда пространство $\exp_c X$ регулярно.*

Доказательство. Рассмотрим точку F пространства $\exp_c X$ и ее окрестность $O\langle U_1, \dots, U_n\rangle$. По II.5.4 существует замкнутое покрытие $\{F_1, \dots, F_n\}$ бикомпакта F, поэлементно вписанное в покрытие $\{U_1, \dots, U_n\}$: $F_i \subset U_i$. При этом предположим, что каждое множество F_i непусто: в противном случае имеем возможность заменить его на множество $\{x\}$, где x — произвольная точка пересечения $F \cap U_i$. По предложению I.4.13 для каждого $i = 1, \dots, n$ найдется открытое в пространстве X множество V_i, удовлетворяющее условию $F_i \subset V_i \subset [V_i] \subset U_i$. По лемме 3.7

$$[O\langle V_1, \dots, V_n\rangle] \subset O\langle U_1, \dots, U_n\rangle.$$

По нашему выбору $V_1, \dots, V_n$ $F \in O\langle V_1, \dots, V_n\rangle$. Ввиду произвольности в выборе точки F и ее окрестности $O\langle U_1, \dots, U_n\rangle$

из сказанного следует регулярность пространства $\exp_c X$, что и требовалось. Теорема доказана.

6.4. Лемма. *Пусть F — бикомпактное подмножество вполне регулярного пространства X, U — окрестность множества F в пространстве X. Тогда существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, принимающая в точках множества F значение 1, а в точках множества $X \setminus U$ — значение 0.*

Доказательство. Для каждой точки t множества F зафиксируем непрерывную функцию $f_t\colon X \to [0,2]$, принимающую значение 2 в точке t и значение 0 на множестве $X \setminus U$. В силу непрерывности функции f_t найдется окрестность Ot точки t в пространстве X, в любой точке которой значение функции f_t не меньше 1. Из покрытия $\{Ot\colon t \in F\}$ бикомпактного подмножества F пространства X выберем конечное подпокрытие $\{Ot_1, \dots, Ot_n\}$. Функция $f^*(x) = f_{t_1}(x) + \dots + f_{t_n}(x)$ непрерывна. Она принимает значение 0 в точках множества $X \setminus U$, а в точках множества F ее значение не меньше 1. Положим $f(x) = \min\{f^*(x), 1\}$. Функция f удовлетворяет всем поставленным условиям.

6.5. Теорема. *Пусть пространство X вполне регулярно. Тогда и пространство $\exp_c X$ вполне регулярно.*

Доказательство. Рассмотрим точку F_0 пространства $\exp_c X$ и ее окрестность $O\langle U_1, \dots, U_n\rangle$. Как и в доказательстве теоремы 6.3, строим замкнутое покрытие $\{F_1, \dots, F_n\}$ бикомпакта F непустыми множествами, поэлементно вписанное в покрытие $\{U_1, \dots, U_n\}$. Воспользовавшись леммой 6.4, строим для каждого $i = 1, \dots, n$ непрерывную функцию $f_i\colon X \to [0,1]$, принимающую значение 1 на множестве $X \setminus U_i$ и 0 на множестве F_i (вместо функции, фигурирующей в лемме, надо рассмотреть функцию $1 - f$). Далее с сохранением обозначений пользуемся конструкцией пункта а) $\Rightarrow$ б) доказательства теоремы 3.8.

§ 7. Метрика Хаусдорфа

7.1. Метрика Хаусдорфа, которую определим ниже, оценивает, насколько два множества различаются по своему расположению в метрическом пространстве. Мы не ставим своей целью провести здесь полный анализ предположений, при которых возможны наши построения, и рассматриваем компактные подмножества фиксированного метрического пространства (X,ρ). Прежде всего введем понятие отклонения одного множества от другого, положив для $F_1, F_2 \in \exp_c X$

$$\alpha(F_1, F_2) = \inf\{\varepsilon \colon \varepsilon > 0, F_2 \subset O_\varepsilon F_1\}.$$

Значение $\alpha(F_1, F_2)$ конечно: семейство $\{O_\varepsilon F_1 \colon \varepsilon > 0\}$ — открытое покрытие пространства X и в силу бикомпактности множества F_2 из него можно выделить конечное подсемейство, покрывающее множество F_2; это подсемейство упорядочено отношением включения (т. е. из любых двух его элементов один лежит в другом), поэтому оно имеет максимальный элемент $O_\delta F_1$; очевидно, $\alpha(F_1, F_2) \leqslant \delta$.

Отметим свойства отклонения α:

для произвольных компактных подмножеств F_1, F_2 и F_3 пространства X

1) $\alpha(F_1, F_2) \geqslant 0$,

2) $\alpha(F_1, F_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $F_2 \subset F_1$,

3) $\alpha(F_1, F_3) \leqslant \alpha(F_1, F_2) + \alpha(F_2, F_3)$.

Среди перечисленных свойств отклонения α нет симметрии. Отклонение им и не обладает и поэтому не является метрикой.

Доказательства этих свойств просты. В некотором пояснении нуждается лишь третье. Приведем его.

Возьмем произвольно $\varepsilon > 0$. Множество F_2 лежит в $(\alpha(F_1, F_2) + \varepsilon)$-окрестности множества F_1, а множество F_3 — в $(\alpha(F_2, F_3) + \varepsilon)$-окрестности множества F_2. Из аксиомы треугольника следует, что любая точка множества F_3 удалена от множества F_1 на расстояние, меньшее $\alpha(F_1, F_2) + \varepsilon + \alpha(F_2, F_3) + \varepsilon$ и, таким образом, $\alpha(F_1, F_3) \leqslant \alpha(F_1, F_2) + \alpha(F_2, F_3) + 2\varepsilon$. Но это верно при любом $\varepsilon > 0$, из чего сразу следует 3.

7.2. ***Расстоянием*** (метрикой) ***Хаусдорфа*** между двумя компактными подмножествами F_1, F_2 метрического пространства X назовем теперь число $\rho_H(F_1, F_2) = \max\{\alpha(F_1, F_2), \alpha(F_2, F_1)\}$.

В отличие от отклонения функция ρ_H симметрична и в силу свойств отклонения она является метрикой на пространстве $\exp_c X$.

Пока еще нельзя утверждать, что эта метрика порождает топологию Виеториса, и поэтому обозначим $H(X)$ пространство компактных подмножеств метрического пространства X с метрикой Хаусдорфа.

7.3. Теорема. *Пусть X — метрическое пространство. Тогда тождественное отображение $i\colon H(x) \to \exp_c X$ является гомеоморфизмом.*

Доказательство. I. Очевидно, отображение i взаимно однозначно.

II. Докажем непрерывность отображения i. Пусть $F_0 \in \exp_c X$ и $O\langle U_1, \dots, U_m\rangle$ — окрестность точки F_0 в пространстве $\exp_c X$. Зафиксируем покрытие $\{F_1, \dots, F_n\}$ компакта F_0 непустыми замкнутыми множествами, поэлементно вписанное в семейство $\{U_1, \dots, U_n\}$. Положим: $\varepsilon = \min\{\rho(F_j, X \setminus U_j)\colon j = 1, \dots, n\}$. Если $F \in H(X)$ и $\rho_H(F_0, F) < \varepsilon$, то $F_0 \subset O_\varepsilon F$ и поэтому для любой точки x компакта F_0 найдется такая точка y компакта F, что $\rho(x, y) < \varepsilon$. Если при этом $x \in F_j$, то $Y \in U_j$ по выбору числа ε. Таким образом, $U_j \cap F \neq \varnothing$ при любом $j = 1, \dots, n$. С другой стороны, $F \subset O_\varepsilon F_0$, поэтому для любой точки y компакта F найдется такая точка $x \in F_0$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$. Но $x \in F_{j_0}$ при некотором $j_0 = 1, \dots, n$, а значит, $y \in U_{j_0} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_j$ по выбору числа ε. Ввиду произвольности точки $y \in F$ это означает, что $F \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_j$. Таким образом, $F \in O\langle U_1, \dots, U_n\rangle$. В силу произвольности точки F ε-окрестности точки F_0 в пространстве $H(X)$ $i(O_\varepsilon F_0) \subset O\langle U_1, \dots, U_n\rangle$. Непрерывность отображения i доказана.

III. Докажем непрерывность отображения i^{-1}. Пусть точка $F_0 \in H(X)$ и число $\varepsilon > 0$ взяты произвольно. Зафиксируем любое конечное покрытие $\{U_1, \dots, U_n\}$ компакта F_0 открытыми в пространстве X множествами, диаметр которых меньше ε и каждое из которых пересекается с компактом F_0. По нашему выбору семейства $\{U_1, \dots, U_n\}$ $F_0 \in O\langle U_1, \dots, U_n\rangle$. Рассмотрим произвольный элемент F множества $O\langle U_1, \dots, U_n\rangle$. Если $y \in F$, то $y \in$ $\in U_j$ при некотором $j = 1, \dots, n$. Так как $U_j \cap F_0 \neq \varnothing$, а диаметр множества U_j меньше ε, то $\rho(y, F_0) < \varepsilon$. Ввиду произвольности точки $y \in F$ и компактности множества F $\alpha(F_0, F) < \varepsilon$. По аналогичным соображениям $\alpha(F, F_0) < \varepsilon$. Таким образом,

$\rho_H(F_0, F) < \varepsilon$. Этим установлена непрерывность отображения i^{-1} в точке F_0, но в силу произвольности в выборе точки F_0 отсюда следует непрерывность отображения i^{-1} на всем пространстве $\exp_c X$. Теорема доказана.

Теперь откажемся от обозначения $H(X)$, считая, что в случае метрического пространства X $\exp_c X$ обозначает пространство компактных подмножеств X с метрикой Хаусдорфа, или, иными словами, ρ_H есть метрика на пространстве $\exp_c X$.

7.4. Замечание. Пусть X есть (метрический) компакт. Из теорем 5.3 и II.4.5 следует метризуемость пространства $\exp X$.

В теореме 7.3 указана соответствующая метрика в явном виде.

7.5. Теорема. *Пространство компактных подмножеств полного метрического пространства с метрикой Хаусдорфа полно.*

Доказательство. I. Пусть метрическое пространство (X, ρ) полно, $\{F_n \colon n = 1, 2, \ldots\}$ — фундаментальная последовательность точек пространства $\exp_c X$, $X_0 = [\cup\{F_n \colon n = 1, 2, \ldots\}]$.

II. Пусть $\{x_n \colon n = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность точек пространства X. Покажем, что либо из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, либо найдутся такое число $\delta > 0$ и такая подпоследовательность $\{x_{n_k} \colon k = 1, 2, \ldots\}$ нашей последовательности, что $\rho(x_{n_j}, x_{n_k}) \geqslant \delta$ при $j \neq k$.

Строим по индукции подпоследовательности $\gamma_i = \{x_n^i \colon n = = 1, 2, \ldots\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, нашей последовательности. На первом шаге полагаем $x_n^0 = x_n$. Пусть построены подпоследовательности $\gamma_0, \ldots, \gamma_{k-1}$. Для построения подпоследовательности γ_k рассматриваем множества $M_n = O_{1/k} x_n^{k-1} \cap \gamma_{k-1}$. Если по крайней мере одно из этих множеств бесконечно, выбираем подпоследовательность γ_k последовательности γ_{k-1}, состоящую из точек соответствующего множества M_n. Если все эти множества конечны, то, выбирая по точке из множеств $M_n \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} M_j$, когда они непусты, реализуем вторую возможность из указанных в формулировке II. Если же удастся продолжить процесс построения последовательностей $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ до бесконечности, то последовательность $\{x^i_i : i = 1, 2, \ldots\}$ оказывается фундаментальной и, в силу полноты пространства X, сходится, т. е. реализуется первая из возможностей формулировки II.

III. Из II.4.6 и II.4.5 следует, что каждое из множеств F_n сепарабельно, поэтому сепарабельными являются и множества $\cup\{F_n : n = 1, 2, \ldots\}$ и X_0. По II.3.5 пространство X_0 обладает счетной базой, поэтому в любое его открытое покрытие можно вписать счетное открытое покрытие (элементами базы), а если при этом каждому элементу вписанного покрытия поставить в соответствие содержащий его элемент первоначального покрытия, то мы тем самым выделим счетное подпокрытие первоначального покрытия. Это означает, что пространство X_0 финально-компактно.

IV. Покажем, что пространство X_0 — компакт. В силу III, I.4.27 и I.4.4 для этого достаточно показать, что из любой последовательности его точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность. В силу II для этого достаточно показать, что невозможна такая ситуация, когда для некоторого $\delta > 0$ существует последовательность $\{x_i : i = 1, 2, \ldots\}$ точек пространства X_0, для любых двух различных элементов которой $\rho(x_i, x_j) > \delta$. Допустим противное, т. е. что такая последовательность существует. Найдем такой номер N, что при $m, n \geqslant N$ $\rho_H(F_m, F_n) < \delta/5$. Отсюда, в частности, следует, что $\alpha(F_N, F_n) < \delta/5$ и поэтому множество $\cup\{F_n : n = N, N+1, \ldots\}$ лежит в замыкании G $(\delta/5)$-окрестности множества F_N, а множество X_0 — в множестве $F_1 \cup \ldots \cup F_{N-1} \cup G$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ зафиксируем точку y_i, положив $y_i = x_i$, если $x_i \in F_1 \cup \ldots \cup F_{N-1}$, и любую точку множества $F_N \cap O_{2\delta/5} x_i$ в противном случае (заметим, что в этом случае $x_i \in G$, поэтому $\rho(x_i, F_N) \leqslant \delta/5$ и указанное пересечение непусто). Если $i \neq j$, то $\rho(y_i, y_j) \geqslant \rho(x_i, x_j) - \rho(x_i, y_i) - \rho(x_j, y_j) > \delta - (2\delta/5) - (2\delta/5) = \delta/5$, поэтому из последовательности $\{y_i : i = 1, 2, \ldots\}$ нельзя выбрать фундаментальной, а следовательно, сходящейся подпоследовательности, а это противоречит компактности множества $F_1 \cup \ldots \cup F_N$.

V. Считаем, что элементы последовательности $\{F_n : n = 1, 2, \ldots\}$ — точки пространства $\exp X_0$. В силу компактности последнего из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (в самом деле, либо наша последовательность содержит стационарную подпоследовательность, либо множество ее точек бесконечно; стационарная последовательность сходится; во втором случае берем предельную точку этого множества, существующую по теореме I.4.4, и подпоследовательность, к ней сходящуюся). Пусть F — предел этой подпоследовательности. Расстояние Хаусдорфа, определенное для множества F и элементов подпоследовательности в пространстве X_0, совпадает с расстоянием Хаусдорфа между ними в пространстве X, поэтому выбранная подпоследовательность сходится к точке F в пространстве $\exp_c X$.

Для произвольно взятого $\varepsilon > 0$ найдем такой номер N, что $\rho_H(F_m, F_n) < \varepsilon/2$ при $m, n \geqslant N$, а если при этом множество F_n принадлежит выбранной подпоследовательности, то $\rho_H(F_n, F) < \varepsilon/2$. Для любого $m \geqslant N$ имеем $\rho_H(F_m, F) \leqslant \rho_H(F_m, F_n) + \rho_H(F_n, F) < \varepsilon$, а это и означает сходимость последовательности $\{F_n : n = 1, 2, \ldots\}$ к точке F в пространстве $\exp_c X$. Теорема доказана.

§ 8. Заключительные замечания

8.1. Пусть X — произвольное T_1-пространство и $X_0 \subset X$. Обозначим $\exp_\infty(X_0, X)$ подпространство пространства $\exp X$, состоящее из всех конечных подмножеств пространства X, лежащих в множестве X_0.

8.2. Теорема. *Если множество X_0 плотно в пространстве X, то множество $\exp_\infty(X_0, X)$ плотно в пространстве $\exp X$.*

Доказательство. Стандартная окрестность в топологии Виеториса имеет вид $O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. Зафиксируем для каждого $i = 1, \ldots, n$ точку $x_i \in U_i \cap X_0$ и положим $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Имеем $F \in \exp_\infty(X_0, X) \cap O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$, откуда ввиду произвольности окрестности $O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ следует доказываемое утверждение.

8.3. Следствие. *Пусть X есть T_1-пространство. Тогда множество $\exp_\infty(X, X) = \cup\{\exp_k X : k = 1, 2, \ldots\}$ плотно в пространстве $\exp X$.*

8.4. Следствие. *Если T_1-пространство X сепарабельно, то и пространство* $\exp X$ *сепарабельно.*

8.5. Пусть $g\colon X \to Y$ — непрерывное отображение T_1-пространства X в T_1-пространство Y. Естественно определить отображение g_* с пространством замкнутых подмножеств пространства X в качестве области определения, положив $g_*(\{F\}) = g(F)$. Но при этом не всегда получаем отображение пространства $\exp X$ в пространство $\exp Y$ по простой причине: образ замкнутого множества не обязан быть замкнутым множеством. Чтобы обойти это обстоятельство, рассмотрим множество $d(g_*)$ всех тех замкнутых подмножеств пространства X, образы которых при отображении g замкнуты в пространстве Y. Множество $d(g_*)$ рассматриваем с топологией, индуцированной из пространства $\exp X \supset d(g_*)$. Пространство $d(g_*)$, хотя в общем случае и меньше пространства $\exp X$, является достаточно большим. Оно, например, содержит пространство $\exp_c X$ при условии, что пространство Y хаусдорфово. Это следует из того, что непрерывный образ бикомпактного пространства бикомпактен, а бикомпактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.

8.6. Теорема. *В предположениях и обозначениях* 8.5 *отображение* $g_*\colon d(g_*) \to \exp Y$ *непрерывно.*

Доказательство. Пусть $F_0 \in d(g_*)$. Стандартная окрестность точки $g_*(\{F_0\})$ в пространстве $\exp Y$ имеет вид $O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$, где множества $U_1, \ldots, U_n$ открыты в пространстве Y. Пусть $F \in d(g_*) \cap O\langle g^{-1}(U_1), \ldots, g^{-1}(U_n)\rangle$. Тогда $g_*(\{F\}) \in \exp Y \cap O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. Заметим, что $F_0 \in O\langle g^{-1}(U_1), \ldots, g^{-1}(U_n)\rangle$. Тем самым доказана непрерывность отображения g_* в точке F_0, откуда ввиду произвольности точки $F_0 \in d(g_*)$ следует доказываемое утверждение.

8.7. Теорема. *Пусть пространство X регулярно, B — бикомпактное подмножество пространства* $\exp X$. *Тогда множество $\cup B$ замкнуто в пространстве X.*

Доказательство. Возьмем произвольно точку $x \in [\cup B]$ и обозначим β множество всех ее окрестностей в пространстве X. По определению топологии Виеториса множество $G(U) = \{F\colon F \in B, F \cap [U] \neq \varnothing\} = B \setminus O\langle X \setminus [U]\rangle$, где $U \in \beta$, замкнуто в бикомпакте B. Эти множества составляют центрированную систему: если $U_1, U_2 \in \beta$, то в силу того, что из $F \cap \cap [U_1 \cap U_2] \neq \varnothing$ следует $F \cap [U_1] \neq \varnothing$ и $F \cap [U_2] \neq \varnothing$, получаем $G(U_1) \cap G(U_2) \supset G(U_1 \cap U_2)$, причем непустота этих множеств следует из выбора точки $x \in [\cup B]$. По I.4.9 найдется точка $F_0 \in \cap \cap \{G(U) \colon U \in \beta\}$. Множество F_0 пересекается с любой окрестностью точки x — это следует из выбора множества F_0 и регулярности пространства X. В силу замкнутости множества F_0 отсюда следует, что $x \in F_0 \subset \cup B$. Ввиду произвольности точки $x \in [\cup B]$ мы доказали тем самым, что $[\cup B] = \cup B$. Теорема доказана.

8.8. Теорема. *Пусть пространство X нормально. Тогда множество всех связных замкнутых подмножеств пространства X замкнуто в пространстве* $\exp X$.

Доказательство. Доказываемое утверждение эквивалентно тому, что множество всех несвязных замкнутых подмножеств пространства X открыто в пространстве $\exp X$. Докажем последнее утверждение. Пусть множество $F_0 \in \exp X$ несвязно. Представим множество F_0 в виде объединения двух непустых замкнутых непересекающихся подмножеств F_1 и F_2. Зафиксируем непересекающиеся окрестности U_1 и U_2 множеств F_1 и F_2 соответственно. Множество $O\langle U_1, U_2 \rangle$ — окрестность точки F_0 в пространстве $\exp X$, и любой его элемент F представляется в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств $F \cap U_1 = F \setminus U_2$ и $F \cap U_2 = F \setminus U_1$. Но это означает несвязность множества F. Теорема доказана.

Глава V

ПРОСТРАНСТВО ОТОБРАЖЕНИЙ

§ 1. Метрика и норма равномерной сходимости

1.1. В этой главе наметим несколько подходов к введению топологии в множестве $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y, далеко не исчерпав при этом списка возможных топологизаций.

Метрика равномерной сходимости, о которой говорится в названии параграфа, введена нами на множестве $BC(X, Y)$ всех непрерывных ограниченных отображений топологического пространства X в метрическое пространство Y (см. I.3.38 и I.3.40). Существенно, что это пространство полно в случае полного пространства Y.

1.2. Действительная функция, определенная на действительном или комплексном векторном пространстве L, сопоставляющая вектору u пространства L число, которое обозначим $\|u\|$, называется нормой, если:

1) $\|u\| > 0$ для любого ненулевого вектора $u \in L$;
2) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$ для любого вектора $u \in L$ и любого числа α;
3) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ для любых векторов $u, v \in L$.

Векторное пространство с фиксированной нормой называется нормированным пространством. Число $\|u\|$ называется нормой вектора u.

Заметим, что из 2 следует, что норма нулевого вектора равна нулю.

В нормированном пространстве введем расстояние, положив $\rho(u, v) = \|u - v\|$ для любых точек $u, v \in L$. Легко видеть, что введенная таким образом функция ρ действительно является метрикой, т. е. удовлетворяет соответствующим аксиомам (см. I.3.1).

1.3. Понятие нормы — обобщение понятия длины вектора на прямой, на плоскости, в трехмерном пространстве, в евклидовом пространстве любой размерности. Оставляем читателю вполне тривиальную проверку того, что длина вектора удовлетворяет условиям 1, 2 и 3 из 1.2.

1.4. В том же пространстве $\mathbb{R}^n$ можно ввести и другие нормы, например, положить $\|u\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ для вектора $u = \{x_1, \dots, x_n\}$.

1.5. В случае, когда Y — нормированное пространство, в пространстве $BC(X, Y)$ можно ввести норму, положив $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$ для $f \in BC(X, Y)$. Выполнение аксиом 1 и 2 определения нормы при этом очевидно, а выполнение аксиомы 3′ следует из того, что вводимая норма функции f есть расстояние от этой функции до функции, тождественно равной нулю, в метрике равномерной сходимости и аксиома 3 оказывается частным случаем аксиомы треугольника (см. I.3.38). Введенная таким образом на пространстве $BC(X, Y)$ норма называется ***нормой равномерной сходимости***.

1.6. Понятие полноты переносится на нормированные пространства. При этом естественно имеется в виду полнота относительно метрики, порожденной имеющейся нормой. Полное нормированное пространство называется ***банаховым*** пространством. Из I.3.40 следует, что если пространство является банаховым, то и пространство $BC(X, Y)$ — также банахово. В частности, пространство непрерывных действительных ограниченных функций на произвольном топологическом пространстве X, взятое с нормой равномерной сходимости, является банаховым. Еще более частный случай: пространство непрерывных действительных функций на бикомпакте, взятое с нормой равномерной сходимости, — банахово (см. I.4.21).

1.7. Лемма. *Для любых трех точек x, y, z метрического пространства (X, ρ) $|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leqslant \rho(x, y)$.*

Доказательство. Доказываемая оценка эквивалентна системе из двух неравенств $-\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) - \rho(y, z) \leqslant \rho(x, y)$, каждое из которых непосредственно следует из аксиомы треугольника.

1.8. Теорема. *Произвольное метрическое пространство X может быть изометрически отображено в пространство непрерывных действительных ограниченных функций на X.*

Доказательство. Зафиксируем произвольно точку $x_0 \in \in X$ и сопоставим произвольной точке x пространства X функцию $\varphi_x(t) = \rho(t,x) - \rho(t,x_0)$. Непрерывность этой функции очевидна. Ее ограниченность следует из леммы 1.7. Таким образом, определено отображение $F(x) = \varphi_x$. Из леммы 1.7 следует, что для произвольных точек x, y пространства X $\|F(x) - F(y)\| \leqslant \leqslant \rho(x,y)$. С другой стороны,

$$\|F(x) - F(y)\| = \sup\{|\varphi_x(t) - \varphi_y(t)| : t \in X\} = \\ = \sup\{|\rho(t,x) - \rho(t,y)| : t \in X\} \geqslant |\rho(x,x) - \rho(x,y)| = \rho(x,y).$$

Сопоставляя, получаем $\|F(x) - F(y)\| = \rho(x,y)$, а это и означает, что определенное нами отображение F является изометрией. Теорема доказана.

§ 2. Бикомпактно-открытая топология и топология поточечной сходимости в пространстве непрерывных отображений

2.1. Семейство λ непустых подмножеств топологического пространства X называется π-сетью, если для любого непустого открытого подмножества U пространства X найдется элемент семейства λ, лежащий в множестве U. Будем рассматривать бикомпактные π-сети, т.е. π-сети, элементы которых — бикомпактные множества.

2.2. Пусть X и Y — топологические пространства. Для $F \subset \subset X$ и $V \subset Y$ обозначим $O(F,V) = \{g : g \in C(X,Y), g(F) \subset V\}$.

Для π-сети λ топологического пространства X обозначим B_λ семейство всех множеств вида $O(F,V)$, где $F \in \lambda$, V — произвольное открытое подмножество пространства Y. Обозначим $C_\lambda(X,Y)$ топологическое пространство, точки которого — элементы множества $C(X,Y)$, а семейство B_λ составляет предбазу топологии.

2.3. Теорема. *Пусть X — бикомпакт, λ — множество всех его замкнутых подмножеств, Y — метрическое пространство. Тогда топология пространства $C_\lambda(X,Y)$ совпадает с топологией равномерной сходимости на множестве $C(X,Y)$ (т. е. с топологией, порожденной метрикой равномерной сходимости).*

Доказательство. В соответствии с данными определениями нашу задачу можно переформулировать следующим образом: доказать, что семейство B_λ является предбазой топологии равномерной сходимости. Первый шаг в решении этой задачи состоит в доказательстве открытости элементов семейства B_λ относительно метрики равномерной сходимости. Пусть F — замкнутое и, следовательно, бикомпактное подмножество пространства X, U — (собственное) открытое подмножество пространства Y, $g \in O(F,U)$. Множество $g(F)$ компактно и лежит в множестве U. Функция $\varphi(t) = \rho(t, Y \setminus U)$ непрерывна (доказать самостоятельно) и принимает в точках компакта $g(F)$ положительные значения. В силу компактности и, следовательно, замкнутости множества $\varphi(g(F))$ на действительной прямой число $\varepsilon = \inf \varphi(g(F)) = \rho(g(F), Y \setminus U)$ положительно. Если теперь расстояние между g и отображением $h \in C(X,Y)$ в метрике равномерной сходимости меньше ε, то для любой точки t множества F и любой точки y множества $Y \setminus U$

$$\rho(h(t), y) \geqslant \rho(g(t), y) - \rho(h(t), g(t)) > \varepsilon - \varepsilon = 0,$$

поэтому $h(t) \in U$ и ввиду произвольности точки $t \in F$ $h \in \in O(F,U)$.

Второй, завершающий шаг доказательства состоит в проверке того, что конечные пересечения элементов семейства B_λ составляют базу топологии равномерной сходимости. Пусть $g \in \in C(X,Y)$ и $\varepsilon > 0$. Для каждой точки $x \in X$ зафиксируем окрестность Ox, удовлетворяющую условию: если $t \in Ox$, то $\rho(g(t), g(x)) < \varepsilon/4$. Из открытого покрытия $\{Ox\colon x \in X\}$ бикомпакта X выбираем конечное подпокрытие $\{Ox_1, \ldots, Ox_n\}$. По I.1.11 множество $F_i = \{t\colon t \in X, \rho(g(t), g(x_i)) \leqslant \varepsilon/4\}$ замкнуто. Оно, очевидно, содержит множество Ox_i, и поэтому семейство $\{F_1, \ldots, F_n\}$ покрывает бикомпакт X. Пусть $U = \cap \cap\{O(F_i, O_{\varepsilon/2}g(x_i)) \colon i = 1, \ldots, n\}$. Возьмем произвольно $h \in U$ и $t \in F_i$, $i = 1, \ldots, n$. Имеем

$$\rho(h(t), g(t)) \leqslant \rho(h(t), g(x_i)) + \rho(g(x_i), g(t)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

поэтому функция h лежит в ε-окрестности функции g относительно метрики равномерной сходимости, а из этого ввиду произвольности функции $h \in U$ получаем, что множество U целиком лежит в ε-окрестности функции g. Осталось заметить, что $g \in U$. Теорема доказана.

Тем самым топология равномерной сходимости на пространстве непрерывных отображений бикомпакта может быть описана по схеме, приведенной нами в 2.2.

2.4. В описанном в 2.2 подходе нас интересуют два крайних случая. Предполагаем, что X есть T_1-пространство. Обозначим p семейство всех одноточечных подмножеств пространства X. Топология пространства $C_p(X, Y)$ называется топологией поточечной сходимости, а само пространство $C_p(X, Y)$ — пространством непрерывных отображений из X в Y в топологии поточечной сходимости. Другой крайний случай — когда семейство λ состоит из всех замкнутых бикомпактных подмножеств пространства X. Эта топология на пространстве $C(X, Y)$ называется *бикомпактно-открытой* топологией. Ее связь с топологией равномерной сходимости показана в 2.3.

Сопоставив каждой непрерывной ограниченной функции на вполне регулярном пространстве X ее непрерывное продолжение на пространство βX, получаем изоморфизм между пространством ограниченных непрерывных функций на пространстве X и пространством непрерывных функций на бикомпакте βX, причем значение нормы функции $f \in BC(X, \mathbb{R})$ совпадает со значением нормы ее продолжения, поэтому указанный изоморфизм — изометрия соответствующих нормированных пространств. Тем самым их топологические свойства совпадают. В то же время относительно бикомпактно-открытых топологий или топологий поточечной сходимости указанное отображение гомеоморфизмом не является, если, конечно, $X \neq \beta X$. Этот же факт можно интерпретировать иначе. Считаем, что речь идет о пространстве непрерывных функций на бикомпакте βX и обозначим λ множество всех замкнутых подмножеств бикомпакта βX (соответственно множество всех одноточечных подмножеств бикомпакта βX), а μ — множество всех бикомпактных подмножеств пространства X (соответственно множество всех одноточечных подмножеств пространства X). Тогда тождественное отображение $C_\lambda(\beta X, \mathbb{R}) \to C_\mu(\beta X, \mathbb{R})$ непрерывно, а обратное к нему отображение не является непрерывным. Оставляем читателю провести полное доказательство этого утверждения.

В оставшейся части параграфа обозначим λ бикомпактную π-сеть, содержащую все одноточечные подмножества T_1-пространства X.

2.5. Для любого замкнутого в пространстве Y множества H и любого подмножества M пространства X множество $O(M,H)$ замкнуто в пространстве $C_\lambda(X,Y)$, — это сразу следует из равенств

$$O(M,H) = \{g\colon g \in C(X,Y), g(M) \subset H\} = \\ = C(X,Y) \setminus \Big(\bigcup_{x\in M} O(\{x\}, Y \setminus H)\Big).$$

2.6. Теорема. *Пусть пространства X и Y являются T_1-пространствами. Тогда $C_\lambda(X,Y)$ — также T_1-пространство.*

Доказательство. Пусть g_1, g_2 — два различных элемента пространства $C_\lambda(X,Y)$. Зафиксируем точку $x \in X$, для которой $g_1(x) \neq g_2(x)$, и положим $H_1 = \{g_1(x)\}$, $H_2 = \{g_2(x)\}$. По 2.5 множества $F_1 = O(\{x\}, H_1)$ и $F_2 = O(\{x\}, H_2)$ замкнуты. Множество $C_\lambda(X,Y) \setminus F_2$ — окрестность точки g_1, не содержащая точку g_2, а множество $C_\lambda(X,Y) \setminus F_1$ — окрестность точки g_2, не содержащая g_1. Теорема доказана.

2.7. Теорема. *Пусть X есть T_1-пространство, Y — T_2-пространство. Тогда пространство $C_\lambda(X,Y)$ является T_2-пространством.*

Доказательство. Пусть g_1, g_2 — два различных элемента пространства $C_\lambda(X,Y)$. Зафиксируем точку $x \in X$, для которой $g_1(x) \neq g_2(x)$, и непересекающиеся окрестности V_1 и V_2 точек

$g_1(x)$ и $g_2(x)$ соответственно. Остается заметить, что множества $O(\{x\}, V_1)$ и $O(\{x\}, V_2)$ — непересекающиеся окрестности точек g_1 и g_2 в пространстве $C_\lambda(X, Y)$. Теорема доказана.

2.8. Теорема. *Пусть X есть T_1-пространство, а пространство Y регулярно. Тогда пространство $C_\lambda(X, Y)$ регулярно.*

Доказательство. Стандартная окрестность точки $g \in C_\lambda(X, Y)$ имеет вид $\cap\{O(F_i, U_i)\colon i = 1, \ldots, n\}$, где $\{F_1, \ldots, F_n\} \subset \lambda$, а множества U_i, $i = 1, \ldots, n$, открыты в пространстве Y. По I.4.13 для каждого $i = 1, \ldots, n$ найдется такое открытое подмножество V_i пространства Y, что $g(F_i) \subset V_i \subset [V_i] \subset U_i$. Из этого, учитывая 2.5, получаем

$$g \in O(F_i, V_i) \subset [O(F_i, V_i)] \subset O(F_i, [V_i]) \subset O(F_i, U_i).$$

Поэтому

$$g \in \cap\{O(F_i, V_i)\colon i = 1, \ldots, n\} \subset [\cap\{O(F_i, V_i)\colon i = 1, \ldots, n\}] \subset$$
$$\subset \cap\{[O(F_i, V_i)]\colon i = 1, \ldots, n\} \subset \cap\{O(F_i, U_i)\colon i = 1, \ldots, n\}.$$

Теорема доказана.

2.9. Теорема. *Пусть X есть T_1-пространство, а пространство Y вполне регулярно. Тогда пространство $C_\lambda(X, Y)$ вполне регулярно.*

Доказательство. Стандартная окрестность точки $g \in C_\lambda(X, Y)$ имеет вид $\cap\{O(F_i, U_i)\colon i = 1, \ldots, n\}$, где $\{F_1, \ldots, F_n\} \subset \lambda$, а множества U_i, $i = 1, \ldots, n$, открыты в пространстве Y. По лемме IV.6.4 для каждого $i = 1, \ldots, n$ найдется такая непрерывная функция $f_i\colon Y \to [0, 1]$, что $f_i|_{g(F_i)} \equiv 0$ и $f_i|_{Y \setminus U_i} \equiv 1$. Положим для $i = 1, \ldots, n$ и $r \in \mathbb{R}$ $U_i^r = \{y\colon y \in Y, f_i(y) < r\}$, $W_r = \cap\{O(F_i, U_i^r)\colon i = 1, \ldots, n\}$. Если $q < r$, то $[W_q] \subset W_r$ (см. рассуждения в доказательстве предыдущей теоремы). Существование требуемой в определении вполне регулярного пространства функции для точки g и ее окрестности $\cap\{O(F_i, U_i)\colon i = 1, \ldots, n\}$ получаем теперь из предложения I.2.17. Теорема доказана.

2.10. Теорема. *Пусть $h\colon X \to Y$ — непрерывное отображение T_1-пространства X в T_1-пространство Y, λ и μ —*

бикомпактные π-сети в X и Y соответственно и $h(F) \in \in \mu$ для любого $F \in \lambda$, Z — топологическое пространство. Для $g \in C_\mu(Y, Z)$ и $x \in X$ положим $H(g)(x) = g(h(x))$. Тогда отображение $H\colon C_\mu(Y, Z) \to C_\lambda(X, Z)$ непрерывно.

Доказать самим.

2.11. Теорема. *Пусть $h\colon X \times Y \to Z$ — непрерывное отображение произведения T_1-пространств X и Y в топологическое пространство Z. Для $x \in X$ и $y \in Y$ положим $h_x(y) = h(x, y)$, $H(x) = h_x$. Тогда отображение $H\colon X \to C_\lambda(Y, Z)$ непрерывно.*

Доказательство. Элемент стандартной предбазы пространства $C_\lambda(Y, Z)$ имеет вид $O(F, U)$, где $F \in \lambda$ — бикомпактное подмножество пространства Y, U — открытое подмножество пространства Z.

Пусть $x_0 \in X$ и $H(x_0) \in O(F, U)$. Имеем $h(\{x_0\} \times F) = H(x_0)(F) \subset U$. Для каждой точки $y \in F$ найдутся ее окрестность Oy в пространстве Y и окрестность $O^y x_0$ точки x_0 в пространстве X такие, что $h(O^y x_0 \times Oy) \subset U$. Из открытого покрытия $\{Oy\colon y \in F\}$ бикомпактного множества F выберем конечное подпокрытие $\{Oy_1, \ldots, Oy_n\}$ и положим $Ox_0 = \cap\{O^{y_i} x_0\colon i = 1, \ldots \ldots, n\}$.

Для любых точек $x \in Ox_0$ и $y \in F$ в силу того, что $y \in Oy_i$ при некотором $i = 1, \ldots, n$, получаем

$$h(x, y) \in h(Ox_0 \times Oy_i) \subset h(O^{y_i} x_0 \times Oy_i) \subset U,$$

поэтому $h(\{x\} \times F) \subset U$, $H(x) \in O(F, U)$. В силу I.1.19 отсюда следует требуемое.

§ 3. Бикомпактно-открытая топология пространства отображений локально бикомпактного пространства

3.1. Для пространства непрерывных отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y с бикомпактно-открытой топологией сохраним обозначение $C(X, Y)$. В теореме 2.3 мы видели, что в случае, когда X — бикомпакт, а Y — метрическое пространство, эта топология совпадает с топологией равномерной сходимости. Это позволяет считать, что бикомпактно-открытая топология соответствует равномерной сходимости на бикомпактных подмножествах области определения.

3.2. Теорема. *Пусть X — локально бикомпактное финально-компактное хаусдорфово пространство, Y — метрическое пространство. Тогда пространство $C(X, Y)$ метризуемо.*

Доказательство. Из наложенных на пространство X условий следует существование не более чем счетного покрытия $\{U_i : i = 1, 2, \ldots\}$ пространства X, состоящего из открытых множеств, замыкания которых бикомпактны. Положим для $i = 1, 2, \ldots$ $F_i = [\cup\{U_1, \ldots, U_i\}]$.

Последовательность бикомпактов $\{F_i : i = 1, 2, \ldots\}$ обладает следующими свойствами:

1) $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$,

2) для любого бикомпакта $K \subset X$ найдется такой индекс i, что $K \subset F_i$.

Свойство 1 очевидно. Чтобы убедиться в выполнении свойства 2, заметим, что в силу бикомпактности множества K найдется конечное число множеств $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ нашего семейства, составляющих покрытие бикомпакта K. Положим $j = \max\{i_1, \ldots, i_n\}$, получаем

$$K \subset \cup\{U_1, \ldots, U_j\} \subset F_j.$$

По теореме 2.3 пространство $C(F_i, Y)$ метризуемо. Отображение $P_i : C(X, Y) \to C(F_i, Y)$, сопоставляющее функции $g \in C(X, Y)$ ее ограничение на подпространство F_i, непрерывно (для доказательства этого применяем теорему 2.10 к вложению $h : F_i \to X$). Положим $Z = \prod\{C(F_i, Y) : i = 1, 2, \ldots\}$ и обозначим $P : C(X, Y) \to Z$ диагональное произведение отображений P_i, $i = 1, 2, \ldots$ (см. II.1.11). Пространство Z метризуемо (см. II.4.2), а отображение P непрерывно (см. II.1.11). Легко проверяется, что если g_1 и g_2 — два различных элемента пространства $C(X, Y)$, то $P(g_1) \neq P(g_2)$. Из этого следует, что определено обратное отображение Q множества $P(C(X, Y))$ на пространство $C(X, Y)$ и теорема будет доказана, если покажем его непрерывность (установив тем самым, что отображение Pявляется гомеоморфизмом пространства $C(X,Y)$ на подпространство $P(C(X,Y))$ метризуемого пространства Z.

Пусть $z \in P(C(X,Y))$, $g_0 = Q(z)$, $O(K,U)$ — элемент стандартной предбазы пространства $C(X,Y)$, содержащий точку g_0. Найдем в соответствии с 2) такой индекс i, что $K \subset F_i$. Множество $V = \{g\colon g \in C(F_i,Y), g(K) \subset U\}$ является окрестностью i-й координаты точки z (в пространстве $C(F_i,Y)$, i-я координата точки z есть ограничение отображения g_0 на подпространство F_i), а множество

$$W = \prod\{C(F_j,Y)\colon j = 1,\dots,i-1\} \times V \times \\ \times \prod\{C(F_j,Y)\colon j = i+1, i+2,\dots\}$$

— окрестностью точки z в пространстве Z. Если $g \in C(X,Y)$ и $P(g) \in W$, то $g|_{F_i} \in V$, поэтому $g(K) \subset U$ и $g \in O(K,U)$. Непрерывность отображения Q, а вместе с ней и теорема доказана (см. I.1.19).

3.3. Теорема. *Пусть X — локально бикомпактное хаусдорфово пространство, Y — произвольное топологическое пространство. Для $x \in X$ и $g \in C(X,Y)$ положим $H(g,x) = g(x)$. Тогда отображение $H\colon C(X,Y) \times X \to Y$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$, $g_0 \in C(X,Y)$, U — произвольная окрестность точки $H(g_0,x_0) = g_0(x_0)$ в пространстве Y. Возьмем такое открытое в пространстве X множество $V \ni x_0$ с бикомпактным замыканием, что $g_0([V]) \subset U$. Положим $W = O([V],U)$. Если теперь $(g,x) \in W \times V$, то $x \in V$ и $g([V]) \subset U$, поэтому $H(g,x) = g(x) \in U$. Но это и означает непрерывность отображения H. Теорема доказана.

Глава VI

МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Полунепрерывные снизу отображения

1.1. До сих пор мы называли отображением соответствие $f\colon X \to Y$, сопоставляющее каждой точке x множества X некоторую однозначно определенную точку $f(x)$ множества Y. Иногда удобно распространить название «отображение» на соответствие, сопоставляющее каждой точке x множества X уже не единственным образом определенную точку, а целую совокупность $F(x)$ точек множества Y. Например, $\operatorname{Arccos} x$ обозначает для любого числа x из отрезка $[-1, 1]$ множество решений уравнения $\cos t = x$, не сводящееся к одной точке. Подобные соответствия называются многозначными отображениями или многозначными функциями.

Точнее, многозначным отображением множества X в множестве Y называется соответствие, сопоставляющее каждой точке x множества X подмножество $F(x)$ множества Y. В принципе на этом уровне можно было бы обойтись и без введения нового понятия, заменив многозначное отображение $F\colon X \to Y$ однозначным отображением $f\colon X \to \mathscr{P}(Y)$ множества X в множество $\mathscr{P}(Y)$ всех подмножеств множества Y, сопоставляющим произвольной точке x множества X элемент $F(x)$ множества $\mathscr{P}(Y)$. Однако в конкретных ситуациях множество Y может нести дополнительную структуру, например геометрическую, топологическую или алгебраическую, и отображение F может быть связано именно с этой структурой. Переформулировка получаемых результатов на языке однозначных отображений требовала бы описания строго адекватной структуры на множестве $\mathscr{P}(Y)$, что, как правило, существенно сложнее и менее наглядно, чем использование языка многозначных отображений.

С одной стороны, всякое однозначное отображение $f\colon X \to Y$ порождает многозначное отображение по формуле $F(x) = \{f(x)\}$, и многие классы однозначных отображений расширяются при этом до классов многозначных отображений с сохранением основных свойств. С другой стороны, если имеется однозначное отображение $f\colon X \to Y$, то оно порождает многозначное отображение $F\colon Y \to X$ по формуле $F(y) = f^{-1}(y)$ — другая стандартная возможность перехода от однозначных отображений к многозначным.

Для многозначного отображения $F\colon X \to Y$, $X_0 \subset X$ и $Y_0 \subset Y$, положим $F(X_0) = \cup\{F(x)\colon x \in X_0\}$, $F^{-1}(Y_0) = \{x\colon x \in X, F(x) \cap Y_0 \neq \varnothing\}$ и обозначим $F|_{X_0}$ ограничение отображения F на подпространство X_0.

Понятия верхнего и нижнего предела, введенные в четвертой главе, позволяют ввести различные классы многозначных отображений топологических пространств, по-разному расширяющих класс непрерывных однозначных отображений. В этом параграфе изучим понятие непрерывности многозначных отображений, соответствующее понятию нижнего предела.

1.2. Теорема. *Пусть $F\colon X \to Y$ — многозначное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y, $x_0 \in X$. Точка $y \in Y$ тогда и только тогда принадлежит множеству $\underline{\lim}_{x \to x_0} F(x)$, когда*

(*) $x_0 \in \langle F^{-1}(Oy) \rangle$ *для любой окрестности Oy точки y.*

Доказать самим, воспользовавшись теоремами IV.1.7 и IV.1.9.

1.3. Многозначное отображение $F\colon X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *полунепрерывным снизу в точке* $x_0 \in X$, если $F(x_0) \subset \underline{\lim}_{x \to x_0} F(x)$, и *полунепрерывным снизу* (на всем пространстве X), если оно полунепрерывно снизу в каждой точке пространства X.

Из теоремы 1.2 сразу получаем следующую характеристику полунепрерывности снизу в точке и на всем пространстве X.

1.4. Теорема. *Многозначное отображение $F\colon X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y полунепрерывно снизу в точке $x_0 \in X$ (соответственно, на всем пространстве X) тогда и только тогда, когда для любого открытого в пространстве Y множества U, пересекающегося с множеством $F(x_0)$ (соответственно, для любого открытого в пространстве Y множества U), $x_0 \in \langle F^{-1}(U)\rangle$ (соответственно, множество $F^{-1}(U)$ открыто).*

1.5. Замечание. Пусть $f\colon X \to Y$ — однозначное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y. Многозначное отображение $F_1\colon X \to Y$, задаваемое формулой $F_1(x) = \{f(x)\}$, полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда отображение f непрерывно. Если $Y = f(X)$, то многозначное отображение $F_2\colon Y \to X$, задаваемое формулой $F_2(y) = f^{-1}(y)$, полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда отображение f открыто.

1.6. Теорема. *Пусть $F\colon X \to Y$ — многозначное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y. Отображение F полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда для любого замкнутого в пространстве Y множества H множество $\{x\colon x \in X, F(x) \subset H\}$ замкнуто в пространстве X.*

Вывести самостоятельно из теоремы 1.4.

1.7. Теорема. *Пусть $\{F_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{A}\}$ — семейство многозначных отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y, полунепрерывных снизу в точке $x_0 \in X$. Тогда отображение $F\colon X \to Y$, задаваемое формулой $F(x) = [\cup\{F_\alpha(x)\colon \alpha \in \mathrm{A}\}]$, полунепрерывно снизу в точке x_0.*

Доказательство. Применяя IV.1.10 г) и IV.1.11, получаем

$$\varliminf_{x\to x_0} F(x) = \varliminf_{x\to x_0} [\cup\{F_\alpha(x)\colon \alpha \in A\}] = \varliminf_{x\to x_0} (\cup\{F_\alpha(x)\colon \alpha \in \mathrm{A}\}) \supset$$
$$\supset \cup\{\varliminf_{x\to x_0} F_\alpha(x)\colon \alpha \in \mathrm{A}\} \supset \cup\{F_\alpha(x_0)\colon \alpha \in \mathrm{A}\}.$$

Множество $F(x_0)$ — замыкание последнего члена этой цепочки, поэтому из замкнутости первого члена цепочки следует, что $\varliminf_{x \to x_0} F(x) \supset F(x_0)$. Теорема доказана.

1.8. Теорема. *Пусть $F\colon X \to Y$ — полунепрерывное снизу многозначное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y и $X_0 \subset X$. Тогда отображение $F|_{X_0}$ полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Сопоставляем определение полунепрерывного снизу отображения с теоремой IV.1.10 в).

§ 2. Полунепрерывные снизу отображения с выпуклыми значениями

2.1. Если x и y — две точки векторного пространства L, то *отрезком* $[x, y]$ назовем множество $\{tx + (1-t)y\colon t \in [0, 1]\}$. При этом, очевидно, множества $[x, y]$ и $[y, x]$ совпадают, т. е. порядок концов отрезка безразличен. Скажем, что этот отрезок соединяет точки x и y.

Подмножество M пространства L назовем *выпуклым*, если для любых двух точек $x, y \in M$ отрезок $[x, y]$ лежит в множестве M.

Вполне тривиально проверяется, что пересечение любого семейства выпуклых множеств — выпуклое множество.

Назовем выпуклой оболочкой произвольного множества $M \subset \subset L$ пересечение всех выпуклых подмножеств пространства L, содержащих множество M (такие подмножества всегда найдутся, например, множество L).

Введем временно обозначение, положив для $M \subset L$ $M^1 = = \cup\{[x, y]\colon x, y \in M\}$ и для $n = 2, 3, \ldots$ $M^n = (M^{n-1})^1$. Вполне очевидно, что выпуклая оболочка множества M совпадает с объединением множеств M^n, $n = 1, 2, \ldots$

2.2. Лемма. *Пусть L — нормированное пространство. Тогда отображение $f\colon L \times L \to \exp_c L$, сопоставляющее паре точек $x, y \in L$ отрезок $[x, y]$, непрерывно.*

Доказательство. Для x_1, y_1, x_2, $y_2 \in L$ и $t \in [0,1]$ имеем

$$\|(tx_1 + (1-t)y_1) - (tx_2 + (1-t)y_2)\| \leqslant \\ \leqslant t\|x_1 - x_2\| + (1-t)\|y_1 - y_2\|.$$

Таким образом, если числа $\|x_1 - x_2\|$ и $\|y_1 - y_2\|$ меньше $\varepsilon > 0$, то расстояние Хаусдорфа между множествами $[x_1, y_1]$ и $[x_2, y_2]$ меньше ε, из чего следует доказываемая непрерывность.

2.3. Следствие. *Замыкание выпуклого множества — выпуклое множество.*

2.4. Лемма. *Пусть многозначное отображение $F\colon X \to L$ топологического пространства X в нормированное пространство L полунепрерывно снизу и для $x \in X$ $F_1(x) = (F(x))^1$. Тогда отображение F_1 также полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$, u_0, $v_0 \in F(x_0)$, $t \in [0,1]$ и W — произвольная окрестность точки $tu_0 + (1-t)v_0$ в пространстве L. Из леммы 2.2 и определения топологии Виеториса следует, что существуют окрестности U и V точек u_0 и v_0, соответственно, такие, что как только $u \in U$ и $v \in V$, отрезок $[u, v]$ пересекается с множеством W. Из теоремы 1.4 получаем существование такой окрестности Ox_0 точки x_0 в пространстве X, что для любой точки $x \in Ox_0$ $F(x) \cap U \neq \varnothing$ и $F(x) \cap V \neq \varnothing$ и по выбору множеств U и V $F_1(x) \cap W \neq \varnothing$. В силу теоремы 1.4 лемма доказана.

2.5. Теорема. *Пусть многозначное отображение $F\colon X \to L$, топологического пространства X в нормированное пространство L полунепрерывно снизу и для $x \in X$ $G(x)$ — замкнутая выпуклая оболочка (т. е. замыкание выпуклой оболочки) множества $F(x)$. Тогда отображение G полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Сопоставляем лемму 2.4 с заключительным замечанием 2.1 и с теоремой 1.7 и получаем требуемое.

2.6. Лемма. *Пусть многозначные отображения F, $G\colon X \to Y$ топологического пространства X в метрическое пространство Y полунепрерывны снизу, $\varepsilon > 0$ и $H(x) =$*

$= O_\varepsilon F(x) \cap G(x) \neq \varnothing$ *для* $x \in X$. *Тогда отображение* H *полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$, $y_0 \in H(x_0)$, U — произвольная окрестность точки y_0 в пространстве Y. Так как $y_0 \in O_\varepsilon F(x_0)$, то $\rho(y_0, F(x_0)) < \varepsilon$ и поэтому число $3\delta = \varepsilon - \rho(y_0, F(x_0))$ положительно. По определению расстояния от точки до множества найдется такая точка $y_1 \in F(x_0)$, что $\rho(y_0, y_1) < \rho(y_0, F(x_0)) + \delta$. Тогда $\rho(y, y_1) \leqslant \rho(y, y_0) + \rho(y_0, y_1) < \rho(y_0, F(x_0)) + 2\delta$ для любой точки $y \in O_\delta y_0$. В соответствии с теоремой 1.4 найдем такую окрестность Ox_0 точки x_0 в пространстве X, что $F(x) \cap O_\delta y_1 \neq \varnothing$ и $G(x) \cap O_\delta y_0 \cap U \neq \varnothing$ для любой точки $x \in Ox_0$. В силу последнего условия найдется точка $y \in G(x) \cap O_\delta y_0 \cap U$. Для нее имеем $\rho(y, F(x)) < \rho(y_0, F(x_0)) + 3\delta = \varepsilon$, поэтому $y \in O_\varepsilon F(x)$ и, следовательно, $y \in H(x)$, $H(x) \cap U \neq \varnothing$. Это в силу теоремы 1.4 и означает полунепрерывность снизу отображения H. Лемма доказана.

2.7. Лемма. *Пусть* $F\colon X \to L$ *— многозначное полунепрерывное снизу отображение паракомпакта* X *в нормированное пространство* L*, значения которого являются непустыми выпуклыми множествами,* $\varepsilon > 0$*. Тогда существует такое однозначное непрерывное отображение* $f\colon X \to L$*, что* $\rho(f(x), F(x)) < \varepsilon$ *для любой точки* $x \in X$*.*

Доказательство. Для $y \in L$ обозначим $Uy = \{x\colon x \in X, y \in O_\varepsilon F(x)\} = \{x\colon x \in X, F(x) \cap O_\varepsilon y \neq \varnothing\}$. Из полунепрерывности снизу отображения F следует открытость множеств $Uy, y \in L$ (см. теорему 1.4). В силу непустоты множеств $F(x), x \in X$, семейство $\gamma = \{Uy\colon y \in L\}$ покрывает пространство X. В силу паракомпактности пространства X существуют локально конечное открытое покрытие γ_1, вписанное в покрытие γ, и разбиение единицы $\{p_V\colon V \in \gamma_1\}$, подчиненное покрытию γ_1. Для каждого множества $V \in \gamma_1$ зафиксируем такую точку $y(V) \in L$, что $V \subset U_{y(V)}$, и положим $f(x) = \sum\{p_V(x)y(V)\colon V \in \gamma_1\}$.

В этой сумме для любой точки $x \in X$ лишь конечное число слагаемых отлично от нуля, а именно отличными от нуля могут быть лишь слагаемые, индексы которых принадлежат конечному семейству $\gamma_x = \{V\colon V \in \gamma_1, p_V(x) \neq 0\}$. Пусть $\gamma_x = \{V_1, \ldots, V_n\}$. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ $F(x) \cap O_\varepsilon y(V_i) \neq \varnothing$ и поэтому найдется такая точка $y_i \in F(x)$, что $\|y(V_i) - y_i\| < \varepsilon$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\|(p_{V_1}(x)y(V_1) + \ldots + \rho_{V_n}(x)y(V_n)) - p_{V_1}(x)y_1 + \ldots + p_{V_n}(x)y_n)\| \leqslant \\ \leqslant p_{V_1}(x)\|y(V_1) - y_1\| + \ldots + p_{V_n}(x)\|y(V_n) - y_n\| \leqslant \\ \leqslant (p_{V_1}(x) + \ldots + p_{V_n}(x))\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

С другой стороны, всякая точка вида $\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n$, где числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ неотрицательны и $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, принадлежит множеству $F(x)$ — это легко выводится из выпуклости этого множества при помощи индукции по n, использующей равенство

$$\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n = \alpha_1 y_1 + (1 - \alpha_1)\left(\frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1} y_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{1 - \alpha_1} y_n\right)$$

$$\text{при } \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1 - \alpha_1 \neq 0.$$

Таким образом, $f(x) \in O_\varepsilon F(x)$. Лемма доказана.

2.8. Однозначное отображение $f\colon X \to Y$ множества X в множество Y называется *селекцией* многозначного отображения (или для многозначного отображения) $F\colon X \to Y$, если $f(x) \in F(x)$ для любой точки $x \in X$.

2.9. Теорема. *Пусть $F\colon X \to L$ — полунепрерывное снизу многозначное отображение паракомпакта X в банахово пространство L, значения которого являются непустыми выпуклыми замкнутыми множествами. Тогда отображение F обладает непрерывной селекцией.*

Доказательство. Построим по индукции непрерывные отображения f_i, $i = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющие условиям:

а) $f_i(x) \in O_{2^{-i+2}} f_{i-1}(x)$ при $i = 2, 3, \ldots$, $x \in X$,

б) $f_i(x) \in O_{2^{-i}} F(x)$ при $i = 1, 2, \ldots$, $x \in X$.

Отображение f_1 существует по лемме 2.7.

Пусть имеются отображения $f_1, \ldots, f_k$. Построим f_{k+1}. Положим $F_{k+1}(x) = F(x) \cap O_{2^{-k}} f_k(x)$. Множество $F_{k+1}(x)$ по б) непусто при любом $x \in X$, и отображение F_{k+1} полунепрерывно снизу по лемме 2.6. Используя лемму 2.7, строим отображение f_{k+1} такое, что $f_{k+1}(x) \in O_{2^{-k-1}} F_{k+1}(x)$ при любом $x \in X$. Проверим выполнение условий а) и б):

а) $f_{k+1}(x) \in O_{2^{-k-1}}(O_{2^{-k}} f_k(x)) \subset O_{2^{-k+1}} f_k(x)$,

б) $f_{k+1}(x) \in O_{2^{-k-1}} F_{k+1}(x) \subset O_{2^{-k-1}} F(x)$.

Построенная последовательность функций при любых $x \in X$ и $i = 1, 2, \ldots$ удовлетворяет оценке $\|f_i(x) - f_{i+1}(x)\| < 2^{-i+1}$ (см. а)), поэтому существует предел $f(x) = \lim\limits_{i \to \infty} f_i(x)$, причем сходимость $f_i \to f$ является равномерной (см. доказательство предложения I.3.39), из чего следует непрерывность отображения f. Из б) следует, что $f(x) \in \bigcap\{O_{2^{-i}}F(x) \colon i = 1, 2, \ldots\} = F(x)$. Теорема доказана.

2.10. Следствие. *Пусть X_0 — замкнутое подпространство паракомпакта X, $f_0 \colon X_0 \to L$ — непрерывное отображение пространства X_0 в банахово пространство L. Тогда существует непрерывное продолжение $f \colon X \to L$ отображения f_0.*

Для получения следствия применяем теорему 2.9 к многозначному отображению

$$F(x) = \begin{cases} \{f_0(x)\}, & \text{при } x \in X_0; \\ L, & \text{при } x \in X \setminus X_0. \end{cases}$$

§ 3. Симплициальные комплексы и нервы покрытий

3.1. Пусть $M = \{a_0, \ldots, a_k\}$ — множество точек векторного пространства L. Обозначим $V(M)$ линейную оболочку системы векторов $a_i - a_j$, $i, j = 0, 1, \ldots, k$. Так как $a_i - a_j = (a_i - a_0) - (a_j - a_0)$, то пространство $V(M)$ совпадает с линейной оболочкой системы векторов $u_i = a_i - a_0$, $i = 1, \ldots, k$, и поэтому его размерность не превосходит k. Скажем, что *точки $a_0, \ldots, a_k$ геометрически независимы* (или *множество M геометрически независимо*), если размерность пространства $V(M)$ равна k. В этом случае векторы $u_i = a_i - a_0$, $i = 1, \ldots, k$, линейно независимы, причем независимо от того, какая из точек множества M обозначена a_0. С другой стороны, условие линейной независимости векторов u_i, $i = 1, \ldots, k$ (при любом выборе точки a_0) является, очевидно, достаточным для геометрической независимости множества M.

Пусть множество M геометрически независимо. Тогда для любой точки $x \in a_0 + V(M)$ найдется единственная система чисел $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$, удовлетворяющая условиям $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$, $x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k$. Для доказательства этого надо воспользоваться единственностью разложения вектора $x - a_0$ по системе $u_1, \ldots, u_k$, причем, учитывая введенные обозначения, пишем $x - a_0 = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k$. Числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ называются *барицентрическими координатами точки* x относительно системы M.

3.2. Бесконечное множество $M \subset L$ называется геометрически независимым, если геометрически независимо каждое его конечное подмножество. Аналогично 3.1 определяются барицентрические координаты точки относительно множества M, и из 3.1 следует их единственность. Заметим, что любое подмножество геометрически независимого множества геометрически независимо.

3.3. Пусть в обозначениях 3.1 множество M геометрически независимо. Множество $T(a_0, \ldots, a_k) = T(M)$ всех точек $x \in$ $\in a_0 + V(M)$, барицентрические координаты которых относительно системы M положительны, назовем *открытым симплексом* с вершинами $a_0, \ldots, a_k$, а множество $T^*(a_0, \ldots, a_k) = T^*(M)$ всех точек, координаты которых неотрицательны, назовем *замкнутым симплексом* с вершинами $a_0, \ldots, a_k$. Скажем, что размерность этих симплексов равна k (это соответствует понятию размерности, введенному в II.5.3, если в пространстве L имеется топология, достаточным образом согласованная с его векторной структурой, например, если L — нормированное пространство). Читателю, впервые сталкивающемуся с этими понятиями, полезно продумать, как выглядят эти множества при малых k (при $k = 0$ имеем дело с точкой, при $k = 1$ — с отрезком, при $k = 2$ — с треугольником).

Если $M_0 \subset M$, $M_0 \neq M$, то симплекс $T(M_0)$ (соответственно $T^*(M_0)$) называется *гранью симплекса* $T(M)$(соответственно $T^*(M)$). Открытый симплекс не пересекается со своими гранями, замкнутый — их содержит. Объединение всех граней называется *границей симплекса.*

3.4. *Симплициальным комплексом* называется множество K, для которого зафиксировано его представление в виде объединения некоторого семейства замкнутых симплексов, каждые два из которых либо не пересекаются, либо один из них является гранью другого, либо пересекаются по симплексу, являющемуся гранью каждого из них. Само множество K называется при этом ***телом*** рассматриваемого ***комплекса***. При наличии комплекса его тело определено однозначно, но одно и то же множество может быть телом различных комплексов.

Простейший пример симплициального комплекса — замкнутый симплекс. Другой пример — граница симплекса.

3.5. Если имеются два геометрически независимых множества $M_0 = \{a_0, \dots, a_k\}$ и $M_1 = \{b_0, \dots, b_k\}$, состоящих из одного и того же количества точек, то можно задать изоморфизм векторных пространств $f\colon V(M_0) \to V(M_1)$, положив $f(a_1 - a_0) = b_1 - b_0, \dots, f(a_k - a_0) = b_k - b_0$. Этот изоморфизм можем дополнить до аффинного преобразования плоскости $a_0 + V(M_0)$ на плоскость $b_0 + V(M_1)$, взяв в качестве образа точки a_0 точку b_0. При этом, как легко видеть, симплекс $T^*(M_0)$ перейдет в симплекс $T^*(M_1)$. Пусть множества M_0 и M_1 взяты в евклидовых пространствах. Евклидова топология порождает топологию на подпространствах $V(M_0)$ и $V(M_1)$. Аффинное преобразование задается линейными уравнениями, поэтому оно непрерывно, как и обратное к нему. Тем самым мы построили гомеоморфизм между симплексами $T^*(M_0)$ и $T^*(M_1)$, причем барицентрические координаты точки и ее образа совпадают. Этим последним условием указанный гомеоморфизм определяется однозначно. Если симплекс $T^*(M_0)$ лежит в произвольном векторном пространстве, то мы можем указанным выше способом аффинно отобразить его на симплекс, лежащий в евклидовом пространстве, и по этому отображению перенести на симплекс $T^*(M_0)$ евклидову топологию. В силу сделанных замечаний топология на симплексе $T^*(M_0)$ задается при этом единственным образом, т. е. не зависит от выбора его аффинного образа. Топология грани определена однозначно независимо от того, задаем ли мы ее этим способом, или рассматриваем грань в качестве подпространства симплекса.

Теперь если у нас есть произвольный симплициальный комплекс, то на его теле мы можем задать топологию, объявив множество открытым (соответственно замкнутым), если его пересечение с каждым симплексом комплекса открыто (соответственно замкнуто) в этом симплексе.

3.6. Пусть K — симплициальный комплекс. Для $i = 0, 1, \ldots$ обозначим K^i объединение всех симплексов комплекса K, размерность которых не превосходит i. В соответствии с нашим определением топологии симплициального комплекса подпространство K^i замкнуто в пространстве K. Мы можем рассматривать его как тело симплициального комплекса (обозначим его также K^i), состоящего из симплексов комплекса K размерности $\leqslant i$. Этот комплекс называется ***i-мерным остовом*** комплекса K. В частности, нульмерный остов совпадает с множеством вершин комплекса K.

3.7. Пусть X — произвольное топологическое пространство, γ — локально конечное открытое покрытие пространства X, $\{p_V : V \in \gamma\}$ — разбиение единицы на X, подчиненное покрытию γ.

Построим по покрытию γ симплициальный комплекс, называемый ***нервом покрытия*** γ. Его вершинами объявим элементы покрытия γ. Если пересечение элементов $U_0, \ldots, U_k$ покрытия γ непусто, то на точки $U_0, \ldots, U_k$ «натянем» симплекс (можно понимать это следующим образом: сопоставим точкам $U_0, \ldots, U_k$ точки $a_0, \ldots, a_k$ пространства $\mathbb{R}^N$, составляющие геометрически независимую систему, и рассмотрим симплекс $T^*(a_0, \ldots, a_k)$). Обозначим его $\Delta(U_0, \ldots, U_k)$. Если при этом $\{U_{i_0}, \ldots, U_{i_j}\} \subset \subset \{U_0, \ldots, U_k\}$, то определен тем самым и симплекс $\Delta(U_{i_0}, \ldots \ldots, U_{i_j})$. Зафиксируем гомеоморфизм этого симплекса на соответствующую грань симплекса $\Delta(U_0, \ldots, U_k)$, сохраняющий барицентрические координаты, соответствующие вершинам $U_{i_0}, \ldots \ldots, U_{i_j}$. Отождествим точки, переходящие одна в другую при таком гомеоморфизме. В объединении построенных симплексов введем топологию, считая ее уже заданной на самих симплексах, симплексы — попарно непересекающимися и открыто-замкнутыми. Отождествленные точки составят при этом замкнутые множества, и можно считать, что мы имеем дело с разбиением пространства (см. I.1.24). В результате получаем комплекс, а его топология совпадает с топологией комплекса, описанной в 3.5.

Можно дать другое описание нерва покрытия. Для этого рассмотрим пространство $\mathbb{R}^\tau$ в качестве векторного пространства (сложение векторов и их умножение на числа выполняются покоординатно, как в $\mathbb{R}^n$). Сопоставим элементу U покрытия γ точку, у которой координата, соответствующая U, равна 1, а остальные координаты — нулевые. Обозначим ее a_U и положим $\Delta(U_0, \ldots, U_k) = T^*(a_{U_0}, \ldots, a_{U_k})$ при $U_0 \cap \ldots \cap U_k \neq \varnothing$. Построенные таким образом симплексы составляют комплекс — нерв покрытия γ. Рассмотрим на нем топологию, описанную в 3.5, не обсуждая ее связь с тихоновской топологией произведения прямых.

Нерв покрытия γ обозначим $K(\gamma)$, его i-мерный остов — $K^i(\gamma)$.

Пусть $x \in X$, $U_0, \ldots, U_k$ — те элементы покрытия γ, которые содержат точку x. Сопоставим точке x точку $p(x)$ симплекса $\Delta(U_0, \ldots, U_k)$, барицентрические координаты которой в симплексе $\Delta(U_0, \ldots, U_k)$ равны $p_{U_0}(x), \ldots, p_{U_k}(x)$. Тем самым зададим отображение $p\colon X \to K(\gamma)$. Это отображение называется ***каноническим отображением*** пространства X в нерв покрытия γ (построенным по разбиению единицы $\{p_V\colon V \in \gamma\}$). Существенно следующее свойство канонического отображения.

3.8. Лемма. *Пусть в обозначениях* 3.7 $f\colon K(\gamma) \to Y$ — *непрерывное отображение нерва покрытия γ в произвольное топологическое пространство Y. Тогда отображение $fp\colon X \to Y$ непрерывно.*

Доказательство. Для доказательства непрерывности отображения fp достаточно проверить непрерывность отображения p в произвольной точке x пространства X. Для проверки последнего условия достаточно найти окрестность Ox этой точки, ограничение на которую отображения fp непрерывно. В качестве окрестности Ox возьмем любую окрестность точки x, пересекающуюся с конечным числом элементов покрытия γ. Пусть это будут множества $U_0, \ldots, U_k$. Обозначим K_0 часть комплекса $X(\gamma)$, состоящую из симплексов, у которых нет вершин, отличных от $U_0, \ldots, U_k$. Ясно, что $p(Ox) \subset K_0$. Каждому $i = 0, \ldots, k$ сопоставим точку a_i пространства $\mathbb{R}^{k+1}$, у которой i-я координата равна 1, а остальные — нулю. Если $\Delta(U_{i_0}, \ldots, U_{i_j})$ — симплекс комплекса K_0, то отобразим его на симплекс $T^*(a_{i_0}, \ldots, a_{i_j})$ в соответствии с 3.5, сопоставив точке U_{i_q} точку $a_{i_q}, q = 0, \ldots, j$. При этом определим отображение $g\colon K_0 \to K_1$

комплекса K_0 на комплекс K_1, лежащий в пространстве $\mathbb{R}^k$. Его непрерывность следует из нашего определения топологии на теле симплициального комплекса, непрерывность обратного отображения — из предложения I.1.15.

Таким образом, надо доказать непрерывность отображения $gp|_{Ox}$. Но оно сопоставляет точке $t \in Ox$ точку $\{p_{U_0}(t), \ldots \ldots, p_{U_k}(t)\}$ пространства $\mathbb{R}^{k+1}$ и его непрерывность следует из непрерывности функций $p_U(t), U \in \gamma$ и из теоремы II.1.3. Лемма доказана.

§ 4. Экви-LC^n-семейства

4.1. Пусть X — топологическое пространство, $n = 0, 1, \ldots$ Скажем, что пространство X удовлетворяет условию C^n (или обладает свойством C^n, или является C^n-пространством, или C^n-множеством), если любое непрерывное отображение границы симплекса размерности $\leqslant n+1$ в пространство X продолжается до непрерывного отображения всего симплекса в пространство X. Скажем, что пространство X удовлетворяет условию LC^n (с аналогичными вариациями этого названия), если для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U в пространстве X найдется такая окрестность V точки x в пространстве X, что всякое непрерывное отображение границы симплекса размерности $\leqslant n+1$ в множество V продолжается до непрерывного отображения всего симплекса в множество U.

4.2. Выберем систему координат и точки $a_0, \ldots, a_k$ в пространстве $\mathbb{R}^k$ так, чтобы начало координат лежало в открытом симплексе $T(a_0, \ldots, a_k)$. Пусть $\lambda_0(x), \ldots, \lambda_k(x)$ — соответствующие барицентрические координаты точки x относительно точек $a_0, \ldots, a_k$. Неравенство $\lambda_i(x) > 0, i = 0, \ldots, k$, описывает открытое полупространство пространства $\mathbb{R}^k$ (см. в 3.1 связь барицентрических координат с разложением векторов в базисе $u_1, \ldots \ldots, u_k$). Поэтому открытый симплекс, будучи пересечением этих открытых полупространств, — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^k$. С другой стороны, из той же связи барицентрических координат с разложением по базису следует ограниченность симплекса и то, что для любого вектора v функция $\lambda_i(tv)$ является линейной и, если $v \neq \vec{0}$, отличной от нулевой. При $t = 0$ все эти функции положительны. В силу ограниченности замкнутого симплекса найдутся индекс $i = 0, \ldots, k$ и значение параметра $t > 0$, для которых $\lambda_i(tv) < 0$. В силу линейности функции λ_i найдется такое значение $t(v,i) > 0$ параметра t, что $\lambda_i(tv) > 0$ при $t < t(v,i)$ и $\lambda_i(t,v) < 0$ при $t > t(v,i)$. Пусть $t(v)$ — наименьшее из значений $t(v,i)$ (для тех $i = 0, \ldots, k$, для которых они определены). Тогда точка $t(v)v$ — единственная общая точка рассматриваемого луча и границы F нашего симплекса. Для точки $v \in \mathbb{R}^k$, $v \neq \vec{0}$, положим $\varphi(v) = \frac{v}{\|v\|}$. Как легко видеть, это отображение непрерывно на $\mathbb{R}^k \setminus \{\vec{0}\}$. В силу сказанного выше оно взаимно однозначно отображает границу симплекса на сферу радиуса 1. Замкнутый симплекс, будучи замкнутым ограниченным множеством, компактен и, следовательно, компактно его замкнутое подмножество F. По предложению I.4.19 φ гомеоморфно отображает множество F на единичную сферу S. Пусть $\psi\colon S \to F$ — обратное отображение. Для $v \in \mathbb{R}^k \setminus \{\vec{0}\}$, положим $\lambda(v) = \frac{v}{\|\psi\varphi(v)\|}$. Из сказанного следует, что эта функция непрерывна при $v \neq \vec{0}$. При $v \to 0$ знаменатель остается больше некоторого $\varepsilon > 0$ (в качестве ε можно взять, например, половину расстояния от нуля до F), а числитель стремится к нулю, поэтому $\lambda(v) \to 0$ и можно продолжить функцию λ по непрерывности, положив $\lambda(\vec{0}) = 0$. Из взаимной однозначности функции λ на каждом луче, исходящем из начала координат (что очевидно), следует ее взаимная однозначность. Из предложения I.4.19 следует, что она гомеоморфно отображает наш симплекс на единичный шар. Из существования указанного гомеоморфизма следует, что в определениях 4.1 вместо отображений симплекса и его границы можно рассматривать отображение шара и ограничивающей его сферы соответствующих размерностей.

4.3. Семейство s подмножеств топологического пространства X назовем *экви-LC^n-семейством*, если для любой точки $x \in \bigcup s$ и любой ее окрестности U в пространстве X найдется такая окрестность V точки x в пространстве X, что для любого множества $S \in s$ любое непрерывное отображение границы симплекса размерности $\leqslant n+1$ в множестве $S \cap V$ продолжается до непрерывного отображения всего симплекса в $S \cap U$.

Возможны вариации этого названия, аналогичные приведенным в 4.1.

Так же, как и в определении 4.1, в последнем определении вместо отображений симплекса и его границы можно рассматривать отображения шара и ограничивающей его сферы, а именно в заключительной части определения сказать: « ... непрерывное отображение сферы S^i размерности $i \leqslant n$ в множество $S \cap V$ продолжается до непрерывного отображения ограничиваемого ею шара D^{i+1} (его размерность равна $i+1$) в множество $S \cap U$».

4.4. Лемма. *Пусть s — экви-LC^n-семейство подмножеств метрического пространства Y, μ — семейство открытых в пространстве Y множеств и $\bigcup s \subset \bigcup \mu$. Тогда существует такое семейство $\varkappa(\mu)$ открытых в пространстве Y множеств, что $\bigcup s \subset \varkappa(\mu)$ и для любых паракомпакта X размерности $\leqslant n+1$, элемента S семейства s и непрерывного отображения $k\colon X \to \bigcup\{V\colon V \in \varkappa(\mu), V \cap S \neq \varnothing\}$ существует такое непрерывное отображение $f\colon X \to S$, что для любой точки x пространства X, найдется элемент семейства μ, содержащий (одновременно) точки $f(x)$ и $k(x)$.*

Доказательство. I. Возьмем покрытие $\mu_{n+1} = \mu$ подпространства $\bigcup s$ открытыми в пространстве Y множествами и построим по нему покрытия $\mu_n, \dots, \mu_0$ подпространства $\bigcup s$ открытыми в пространстве Y множествами, удовлетворяющие условию:

(*) для любого $i = n, \dots, 0$, любых множеств $U_0, \dots, U_i \in \mu_i$, каждые два из которых пересекаются, найдется такое множество $U \in \mu_{i+1}$, что $U \supset \bigcup\{U_0, \dots, U_i\}$, и для всякого элемента S семейства s и любого непрерывного отображения g границы $(i+1)$-мерного симплекса Δ в подпространство S, такого, что $g(\Delta_j) \subset U_j$ для любой i-мерной грани Δ_j, $j = 0, \dots, i$, симплекса Δ существует непрерывное продолжение $g_1\colon \Delta \to U \cap S$ отображения g.

Для построения покрытия μ_i по μ_{i+1} сопоставим каждой точке $y \in \bigcup s$ любое множество $U \in \mu_{i+1}$, содержащее эту точку, и такое число $\varepsilon(y) > 0$, что $O_{3\varepsilon(y)}y \subset U$ и

(**) для любого подпространства $S \in s$ любое непрерывное отображение границы $(i+1)$-мерного симплекса в множество

$S \cap O_{3\varepsilon(y)}y$ продолжается до непрерывного отображения всего симплекса в множество $S \cap U$.

Это можно сделать по определению экви-LC^n-семейства. В качестве μ_i возьмем семейство $\{O(y)\colon y \in \cup s\}$, где $O(y) = O_{\varepsilon(y)}y$. Если множества $O(y_0), \ldots, O(y_i)$ попарно пересекаются, то выберем из точек $y = y_0, \ldots, y_i$ одну из тех, для которых число $\varepsilon(y)$ максимально. В качестве множества U, фигурирующего в условии (**), возьмем множество U условия (**), сопоставленное отобранной из точек $y_0, \ldots, y_i$ точке y. В силу того, что множества $O(y_0), \ldots, O(y_i)$ попарно пересекаются, а число $\varepsilon(y)$ максимально, $\cup\{O(y_j)\colon j = 0, \ldots, i\} \subset O_{3\varepsilon(y)}y$, из (**) следует выполнение условия (*).

II. Пусть K — симплициальный комплекс размерности $\leqslant n+1$ (т.е. не содержащий симплексов размерности $> n+1$), $\Gamma_0\colon K^0 \to S \in s$, и пусть для любого симплекса Δ комплекса K найдется множество $U(\Delta) \in \mu_0$, для которого $\Gamma_0(\Delta \cap K^0) \subset U(\Delta)$. Используя условие (*), строим последовательно непрерывные отображения $\Gamma_i\colon K^i \to S$, $i = 1, \ldots, n+1$, удовлетворяющие условию: для любого симплекса $\Delta \in K^i$ множество $\Gamma_i(\Delta \cap K^i)$ лежит в некотором элементе семейства μ_i. Для этого возьмем произвольно i-мерный симплекс $\Delta \in K^i$. На его границе задано отображение Γ_{i-1}. В соответствии с (*) продолжаем отображение Γ_{i-1} на симплекс Δ и выбираем элемент семейства μ_i, содержащий его образ. Тем самым мы построили продолжение отображения Γ_{i-1} на весь i-мерный остов комплекса K. Обозначим это продолжение Γ_i. Из нашего определения топологии симплициального комплекса, данного в 3.5, и непрерывности отображения Γ_i на каждом симплексе комплекса K размерности $\leqslant i$ следует непрерывность отображения Γ_i на всем i-мерном остове K^i.

Непрерывное отображение $\Gamma = \Gamma_{n+1}$ определено на всем комплексе $K = K^{n+1}$ и продолжает отображение Γ_0. Для любого симплекса Δ комплекса K найдется множество $V(\Delta) \in \mu_{n+1}$, для которого $\Gamma(\Delta) \subset V(\Delta)$ и $U(\Delta) \subset V(\Delta)$.

III. Для каждой точки $y \in \cup s$ зафиксируем число $\eta(y)$, такое, что множество $O_{2\eta(y)}y$ лежит в некотором элементе семейства μ_0, и положим $\varkappa(\mu) = \{O_{\eta(y)}y\colon y \in \cup s\}$.

Пусть $S \in s$, X — паракомпакт размерности $\leqslant n+1$ и отображение $k\colon X \to \cup\{U\colon U \in \varkappa(\mu), U \cap S \neq \varnothing\}$ непрерывно. Для каждой точки $x \in X$ зафиксируем окрестность Ox, для которой найдется такое множество $U \in \varkappa(\mu)$, что $k(Ox) \subset U$. В покрытие $\{Ox\colon x \in X\}$ пространства X впишем локально конечное покрытие γ кратности $\leqslant n+2$. Для каждого множества $W \in \in \gamma$ зафиксируем элемент $V(W)$ семейства $\varkappa(\mu)$, содержащий множество $k(W)$ (это возможно в силу того, что покрытие γ вписано в покрытие $\{Ox\colon x \in X\}$, которое обладает аналогичным свойством по своему построению), и точки $x(W) \in W, y(W) \in \in \cup s$, причем последнюю выбираем таким образом, что $V(W) = = O_{\eta(y(W))}y(W)$.

Если теперь $W_1, W_2 \in \gamma$, $W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$ и $\eta = \max\{\eta(y(W_1)), \eta(y(W_2))\}$, то $V(W_1) \cap V(W_2) \supset k(W_1 \cap W_2) \neq \varnothing$ и

$$\rho(y(W_1), y(W_2)) < \eta(y(W_1)) + \eta(y(W_2)) \leqslant 2\eta.$$

Отсюда следует, что если пересечение семейства $\{W_1, \ldots, W_s\} \subset \subset \gamma$ непусто, то точки $y(W_1), \ldots, y(W_s)$ лежат в некотором элементе семейства μ_0, а именно в элементе, содержащем множество $O_{2\eta(y)}y$, где y — та из точек $y(W_1), \ldots, y(W_s)$, для которой число $\eta(y(W_i))$ максимально. В этом же множестве содержится и множество $k(\cap\{W_1, \ldots, W_s\})$.

Зададим отображение $\Gamma_0\colon K^0(\gamma) \to S$, положив $\Gamma_0(W) = = y(W)$ для $W \in \gamma$, и продолжим его до отображения $\Gamma\colon K(\gamma) \to \to S$ в соответствии с II.

IV. Пусть $p\colon X \to K(\gamma)$ — каноническое отображение (построенное по любому разбиению единицы, подчиненному покрытию γ, см. 3.7). Положим $f = \Gamma p$.

Пусть x — произвольная точка пространства X, $W_1, \ldots, W_p$ — все элементы покрытия γ, содержащие эту точку (имеем $p \leqslant n + + 2$), σ — симплекс полиэдра $K(\gamma)$, соответствующий множествам $W_1, \ldots, W_p$. Имеем $k(x) \in k(W_i) \subset V(W_i)$. Найдутся такие $U \in \mu_0$, $V \in \mu_{n+1}$, что $\{k(x), y(W_1), \ldots, y(W_p)\} \subset U$, $U \cup \Gamma(\sigma) \subset \subset V$. Отсюда следует, что $\{k(x), f(x)\} \subset V \in \mu$.

Непрерывность отображения f следует из леммы 3.8. Лемма доказана.

4.5. Лемма. *Пусть s — экви-LC^n-семейство подмножеств банахова пространства L, ε и μ — семейства открытых в пространстве L множеств, $\cup s \subset (\cup\varepsilon) \cap (\cup\mu)$. Тогда существуют такие семейства $\eta(\varepsilon)$ (зависящее только от семейства ε) и $\lambda(\varepsilon, \mu)$ открытых в пространстве L множеств, что $\cup s \subset (\cup\eta(\varepsilon)) \cap (\cup\lambda(\varepsilon, \mu))$, и если $S \in s, U \in \eta(\varepsilon)$ и отображение $k\colon \Delta \to U \cap (\cup\{V\colon V \in \lambda(\varepsilon, \mu), V \cap S \neq \varnothing\}$ границы Δ m-мерного симплекса σ $(m \leqslant n+1)$ непрерывно, то найдется такой элемент W семейства ε, что отображение K может быть продолжено до непрерывного отображения симплекса σ в множество $W \cap (\cup\{V\colon V \in \mu, V \cap S \neq \varnothing\})$. Если при этом любой элемент семейства s является C^n-множеством и $L \in \in \varepsilon$, то можно дополнительно потребовать $L \in \eta(\varepsilon)$.*

Доказательство. I. Для каждой точки $y \in \cup s$ зафиксируем такое число $\theta(y) > 0$, что $O_{3\theta(y)}y \subset V$ для некоторого элемента V семейства ε и для любого подпространства $S \in s$ любое непрерывное отображение $g\colon \Delta \to O_{3\theta(y)}y \cap S$ границы Δ m-мерного симплекса σ, $m \leqslant n+1$, продолжается до непрерывного отображения симплекса σ в множество $V \cap S$, и такое число $\xi(y) > 0$, что $7\xi(y) < \min\{\theta(y), 1\}$ и множество $O_{\xi(y)}y$ лежит в некотором элементе семейства μ.

Заметим, что выбор числа $\theta(y)$ зависит только от семейства ε, а числа $\xi(y)$ — и от семейства μ. Положим

$$\eta(\varepsilon) = \{O_{\theta(y)}y\colon y \in \cup s\}, \quad \lambda(\varepsilon, \mu) = \varkappa(\{O_{\xi(y)}y\colon y \in \cup s\}),$$

где символ $\varkappa$ использован в соответствии с формулировкой леммы 4.4.

II. Пусть отображение k удовлетворяет условиям, поставленным в формулировке леммы с множеством $O_{\theta(y_0)}y_0$ в качестве U. Множество всех точек $y \in \cup s$, для которых $O_{\theta(y_0)}y_0 \cap O_{\xi(y)}y \neq \neq \varnothing$, обозначим A. По лемме 4.4 существует такое непрерывное отображение $f\colon \Delta \to S$, что для любой точки $x \in \Delta$ найдется такое множество вида $O_{\xi(y)}y$, что $\{f(x), k(x)\} \subset O_{\xi(y)}y$. Так как $f(x) \in O_{\theta(y_0)+2\xi_y}y_0$ для любой точки $x \in \Delta$ и $y \in A$, то

а) если $\xi(y) \leqslant \theta(y_0)$ для всех $y \in A$, то $f(\Delta) \subset O_{3\theta(y_0)}y_0$;

б) если множество $A_1 = \{y\colon y \in A, \theta(y_0) < \xi(y)\}$ непусто, то, введя обозначение $\xi_1 = \sup\{\xi(y)\colon y \in A_1\}$, зафиксируем точку $y_1 \in A_1$, для которой $\xi(y_1) > \max\{\theta(y_0), \xi_1/2\}$. Тогда при помощи стандартной выкладки с использованием аксиомы треугольника убеждаемся, что

$$\cup\{O_{\xi(y)}y\colon y \in A\} \cup O_{\theta(y_0)}y_0 \subset O_{7\xi(y_1)}y_1.$$

Таким образом, в обоих случаях найдется точка $t \in \cup s$ (как мы убедились, можно взять $t = y_0$ или y_1), для которой

$$f(\Delta) \cup k(\Delta) \subset O_{3\theta(t)}t.$$

Обозначим h_1 линейную гомотопию между отображениями k и f, т.е. $h_1(x,t) = tf(x) + (1-t)k(x)$ для $x \in \Delta$ и $t \in [0,1]$. Отображение h_1 непрерывно на произведении $\Delta \times [0,1]$ (доказать) и $h_1(\Delta \times [0,1]) \subset O_{3\theta(t)}t$.

Пространство $\Delta \times [0,1]$ считаем вложенным в симплекс σ. Для построения соответствующего вложения возьмем любую точку a, принадлежащую открытому симплексу с теми же вершинами, что и у σ, перенесем в эту точку начало координат и сопоставим точке $(x,t) \in \Delta \times [0,1]$ точку $(2-t)x/2$. Легко видеть, что это отображение непрерывно и образы различных точек не совпадают. Отсюда следует, что мы определили гомеоморфизм пространства $\Delta \times [0,1]$ на подмножество симплекса σ. Дополнение к образу этого гомеоморфизма в симплексе σ есть открытый симплекс σ_0 с вершинами $a_0/2, \ldots, a_m/2$, где $a_0, \ldots$ $\ldots, a_m$ — вершины симплекса σ, а на границе Δ_0 симплекса σ_0 задано отображение $f_1(x) = f(2x)$.

Возвращаясь к началу этого пункта, вспоминаем, что для любой точки $x \in \Delta$ найдется такое множество $O_{\xi(y)}y$, $y \in A$, что $\{f(x), k(x)\} \subset O_{\xi(y)}y$ и поэтому $h_1(x \times [0,1]) \subset O_{\xi(y)}y \subset$ $\subset \cup\{W\colon W \in \mu, W \cap S \neq \varnothing\}$, из чего ввиду произвольности точки $x \in \Delta$

$$\eta_1(\Delta \times [0,1]) \subset \cup\{W\colon W \in \mu, W \cap S \neq \varnothing\}.$$

III. В II мы установили, что $f(\Delta) = f_1(\Delta_0) \subset O_{3\theta(t)}t$. По выбору числа $\theta(t)$ отображение $f_1\colon \Delta_0 \to S$ продолжается до непрерывного отображения h_2 замкнутого симплекса $\sigma_0 \cup \Delta_0$ в множество $V \in \varepsilon$, $V \supseteq O_{3\theta(t)}t$. Из предложения I.1.15 следует, что непрерывно отображение h, заданное формулой

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x), & \text{если } x \in \sigma \setminus \sigma_0; \\ h_2(x), & \text{если } x \in \sigma_0. \end{cases}$$

Образ при этом отображении лежит в множестве $V \in \varepsilon$.

IV. Если $L \in \varepsilon$ и любое множество $S \in s$ удовлетворяет условию C^n, то семейство $\eta(\varepsilon)$ можно пополнить множеством L, а для доказательства выполнения налагаемых условий надо повторить наши рассуждения, опустив в II и III условия, связанные с выбором $O_{3\theta(t)}t$. Лемма доказана.

§ 5. Полунепрерывные снизу отображения в банахово пространство со значениями из экви-LC^n-семейства

5.1. Зафиксируем обозначения, которые используются в этом параграфе.

Пусть $F\colon X \to L$ — многозначное полунепрерывное снизу отображение паракомпакта X в банахово пространство L, $\dim X \leqslant n+1$, s — экви-LC^n-семейство подмножеств пространства L и для любой точки $x \in X$ множество $F(x)$ непусто, замкнуто и принадлежит s.

Пусть γ — локально конечное открытое покрытие пространства X кратности $\leqslant n+2$, $\Gamma\colon K^i(\gamma) \to L$ — непрерывное отображение и ε и μ — семейства открытых подмножеств пространства L, для которых $\cup s \subset (\cup\varepsilon) \cap (\cup\mu)$. Обсудим выполнение следующего условия:

$\langle \gamma, i, \Gamma, \varepsilon, \mu\rangle$ для любого симплекса σ нерва $K(\gamma)$ покрытия γ и любой точки x пересечения элементов покрытия γ, являющихся вершинами симплекса σ, найдется множество $V \in \varepsilon$, для которого $\Gamma(\sigma \cap K^i(\gamma)) \subset V \cap (\cup\{W\colon W \in \mu, W \cap F(x) \neq \varnothing\})$.

При $i = 0$ это условие выглядит следующим образом:

для любых элементов $U_1, \ldots, U_s$ покрытия γ и любой точки $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_s$ найдется множество $V \in \varepsilon$, для которого

$$\{\Gamma(U_1), \ldots, \Gamma(U_s)\} \subset V \cap (\cup\{W\colon W \in \mu, W \cap F(x) \neq \varnothing\}).$$

Топология на нульмерном остове комплекса $K(\gamma)$ — дискретная, и нет необходимости говорить о непрерывности отображения $\Gamma\colon K^0(\gamma) \to L$. Любое такое отображение оказывается непрерывным.

5.2. Лемма. *Пусть ε и μ — семейства открытых подмножеств пространства L и $\cup s \subset (\cup\varepsilon) \cap (\cup\mu)$. Тогда существует такое семейство $\nu(\varepsilon)$ открытых подмножеств про-*

странства L, что $\cup s \subset \cup\nu(\varepsilon)$ и для любого непрерывного отображения $k\colon X \to L$, удовлетворяющего для любой точки $x \in X$ условию $k(x) \in \cup\{W\colon W \in \nu(\varepsilon), W \cap F(x) \neq \varnothing\}$, существуют локально конечное открытое покрытие γ пространства X кратности $\leqslant n+2$ и отображение $\Gamma\colon \gamma \to L$ такие, что для любой точки x пересечения элементов $U_1, \ldots, U_s$ покрытия γ найдется такой элемент V семейства ε, что $k(x) \in \in V$ и $\{\Gamma(U_1), \ldots, \Gamma(U_s)\} \subset V \cap (\cup\{W\colon W \in \mu, W \cap F(x) \neq \varnothing\})$.

Доказательство. Для каждой точки $y \in \cup s$ зафиксируем такое число $\theta(y) > 0$, что множество $O_{3\theta(y)}y$ лежит в некотором элементе семейства ε, и обозначим $\nu(\varepsilon) = \{O_{\theta(y)}y\colon y \in \cup s\}$.

Пусть теперь k — отображение, фигурирующее в условии леммы. Для $W_1 \in \nu(\varepsilon)$ и $W_2 \in \mu, W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$, обозначим $G(W_1, W_2)$ пересечение $k^{-1}(W_1) \cap F^{-1}(W_2)$. В силу непрерывности отображения k и полунепрерывности снизу отображения F множество $G(W_1, W_2)$ открыто. Очевидно, что такие множества образуют покрытие пространства X. Впишем в него локально конечное открытое покрытие γ кратности $\leqslant n+2$. Произвольному элементу U покрытия γ сопоставим множества $W_1(U) \in \in \nu(\varepsilon)$ и $W_2(U) \in \mu$, для которых $W_1(U) \cap W_2(U) \neq \varnothing$ и $U \subset \subset G(W_1(U), W_2(U))$, и точку $\Gamma(U) \in W_1(U) \cap W_2(U)$.

Пусть $U_1, \ldots, U_p \in \gamma$ и $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_p$. Пусть $j = 1, \ldots, p$ таково, что число $\theta(y_j)$ является наибольшим из чисел $\theta(y_i)$, $i = 1, \ldots, p$, где $W_1(U_i) = O_{\theta(y_i)}y_i$. Так как для любого $i = 1, \ldots$ $\ldots, p$ $k(x) \in W_1(U_i)$, то $\{\Gamma(U_1), \ldots, \Gamma(U_p), k(x)\} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} W_1(U_i) \subset \subset O_{3\theta(y_j)}y_j$, а множество $O_{3\theta(y_j)}y_j$ лежит в некотором элементе V семейства ε.

Далее, $x \in G(W_1(U_i), W_2(U_i))$ для любого $i = 1, \ldots, p$, поэтому $F(x) \cap W_2(U_i) \neq \varnothing$ и, следовательно, $\Gamma(U_i) \in W_2(U_i) \subset \subset \cup\{W\colon W \in \mu, W \cap F(x) \neq \varnothing\}$. Лемма доказана.

5.3. Лемма. *Пусть ε и μ — семейства открытых подмножеств пространства L и $\cup s \subset (\cup\varepsilon) \cap (\cup\mu)$. Тогда существуют такие семейства $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon, \mu)$ открытых подмножеств пространства L, что $\cup s \subset (\cup\alpha(\varepsilon)) \cap (\cup\beta(\varepsilon, \mu))$ и если $i = 0, \ldots, n$, γ — открытое локально конечное покрытие пространства X кратности $\leqslant n+2$ и отображение $\Gamma\colon K^i(\gamma) \to L$*

удовлетворяют условию $\langle\gamma, i, \Gamma, \alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon,\mu)\rangle$, ***то существуют открытое локально конечное покрытие*** γ_1 ***пространства*** X ***кратности*** $\leqslant n+2$ ***и отображение*** $\Gamma_1\colon K^{i+1}(\gamma_1)\to L$, ***такие, что выполнено условие*** $\langle\gamma_i, i+1, \Gamma, \alpha, \mu\rangle$, ***и если*** $U_1\in\gamma_1$, ***то*** $U_1\subset U$ ***и*** $\Gamma_1(U_1)=\Gamma(U)$ ***для некоторого*** $U\in\gamma$. ***Если при этом любое множество*** $F(x)$, ***где*** $x\in X$, ***есть*** C^n***-множество и*** $L\in\in\varepsilon$, ***то можно дополнительно потребовать*** $L\in\alpha(\varepsilon)$.

Доказательство. I. Для каждой точки $y\in\bigcup s$ зафиксируем такое число $\theta(y)>0$, что $3\theta(y)$-окрестность точки y лежит в некотором элементе семейства ε. Пусть $\varepsilon'=\{O_{\theta(y)}y\colon y\in\bigcup s\}$. В соответствии с леммой 4.5 построим семейства $\eta(\varepsilon')$ и $\beta(\varepsilon,\mu)=\lambda(\varepsilon',\mu)$. При этом потребуем дополнительно, чтобы семейство $\eta(\varepsilon')$ было вписано в семейство ε', а семейство $\beta(\varepsilon,\mu)$ — в семейства ε' и μ. Для каждой точки $y\in\bigcup s$ зафиксируем такое число $\xi(y)>0$, что $3\xi(y)$-окрестность точки y лежит в некотором элементе семейства $\eta(\varepsilon')$, и положим $\alpha(\varepsilon)=\{O_{\xi(y)}y\colon y\in\bigcup s\}$.

II. Пусть σ — симплекс комплекса $K^{i+1}(y)$ с вершинами $U_0,\ldots,U_{k+1}\in\gamma$ и $x\in U_0\cap\ldots\cap U_{k+1}$. Зададим отображение $\Gamma_{x\sigma}\colon\sigma\to L$.

а. Если $\dim\sigma=k+1\leqslant i$, то положим $\Gamma_{x\sigma}=\Gamma|_\sigma$.

б. Если $\dim\sigma=k+1=i+1$, то возьмем в качестве $\Gamma_{x\sigma}$ любое непрерывное продолжение отображения Γ, заданного на границе симплекса σ, удовлетворяющее условию: $\Gamma_{x\sigma}(\sigma)\subset\subset\bigcup\{W\colon W\in\mu, W\cap F(x)\neq\varnothing\}$ и $\Gamma_{x\sigma}(\sigma)\subset O_{\theta(y)}y$ для некоторого $y\in\bigcup s$. Поясним, почему такое продолжение существует. Образ каждой i-мерной грани симплекса σ лежит в некотором множестве вида $O_{\xi(y)}y$, где $y\in\bigcup s$. Всего у симплекса σ $(i+2)$ i-мерные грани. Пусть множество $O_{\xi(y_j)}y_j, y_j\in\bigcup s$, $j=0,\ldots,i+1$, содержит образ j-й i-мерной грани. Взяв ту из точек y_j, для которой число $\xi(y_j)$ наибольшее, и применив стандартное рассуждение с использованием аксиомы треугольника, получим, что образ границы симплекса σ лежит в множестве $O_{3\xi(y_j)}y_j$ и, следовательно, в некотором элементе семейства $\eta(\varepsilon')$. Далее вспоминаем наш выбор семейства $\eta(\varepsilon')$ в соответствии с леммой 4.5.

III. Компактное множество $\Gamma_{x\sigma}(\sigma)$ покрывается семейством открытых множеств $\{W\colon W\in\mu, W\cap F(x)\neq\varnothing\}$. Выделим из этого семейства конечное подсемейство $\{W_1,\ldots,W_p\}$, также покрывающее множество $\Gamma_{x\sigma}(\sigma)$, и положим

$$P_{x\sigma} = \cap\{\{t\colon t \in X, F(t) \cap W_j \neq \varnothing\}\colon j = 1, \ldots, p\}.$$

В силу полунепрерывности снизу отображения F множество $P_{x\sigma}$ открыто в пространстве X. Оно, очевидно, содержит точку x. Для любой точки $t \in P_{x\sigma}$

$$\Gamma_{x\sigma}(\sigma) \subset \cup\{W\colon W \in \mu, W \cap F(t) \neq \varnothing\}.$$

IV. Обозначим для $x \in X$ через Q_x пересечение всех множеств вида $P_{x\sigma}$, где σ пробегает множество всех симплексов комплекса $K^{i+1}(\gamma)$, вершины $U_1, \ldots, U_s$ которых удовлетворяют условию $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_s$. Ясно, что таких симплексов σ лишь конечное число (ибо покрытие γ локально конечно), поэтому множество Q_x — окрестность точки x.

V. В покрытие γ звездно впишем открытое покрытие δ_0 [1]), в покрытие δ_0 звездно впишем открытое локально конечное покрытие δ_1 [1]) и для $x \in X$ положим $R_x = \cap\{U\colon x \in U \in \delta_1\} \cap \cap Q_x$. Семейство $\{R_x\colon x \in X\}$ состоит из открытых множеств пространства X, покрывает пространство X и вписано в покрытие δ_1.

В покрытие $\{R_x\colon x \in X\}$ звездно впишем открытое покрытие δ_2 [1]), в покрытие δ_2 звездно впишем открытое локально конечное покрытие γ_1 кратности $\leqslant n+2$ [1]). Так как для $U \in \gamma_1$ [2]) $\cup\{W\colon W \in \gamma_1, W \cap U \neq \varnothing\} \subset \cup\{W\colon U \subset W \in \delta_2\} \subset \cup\{W\colon t \in \in W \in \delta_2\}$ для любой точки $t \in U$, то найдется точка $g(U) \in X$, для которой $\cup\{W\colon W \in \gamma_1, W \cap U \neq \varnothing\} \subset R_{g(U)}$.

Так как множество $M(U) = \cup\{W\colon W \in \delta_1, W \cap (\cup\{V\colon g(U) \in \in V \in \delta_1\} \neq \varnothing\}$ [2]) лежит в множестве $\cup\{W\colon g(U) \in W \in \delta_0\}$, то найдется множество $H(U) \in \gamma$ [2]), содержащее множество $M(U) \supseteq U$.

Если $U_1, \ldots, U_s \in \gamma_1$ и $U_1 \cap \ldots \cap U_S \neq \varnothing$, то $U_1 \cup \ldots \cup U_s \subset \subset R_{g(U_i)} \cap R_{g(U_j)}$ для любых $i, j = 1, \ldots, s$, поэтому $g(U_j) \in \in M(U_i) \subset H(U_i)$.

[1]) См. предложение II.5.14 и теорему II.5.34.

[2]) В силу звездной вписанности.

Пусть σ — симплекс нерва покрытия γ_1 с вершинами $U_0, \ldots$ $\ldots, U_{i+1}$. Обозначим $d(\sigma)$ любую из точек $g(U_0), \ldots, g(U_{i+1})$. В силу сказанного выше $d(\sigma) \in H(U_0) \cap \ldots \cap H(U_{i+1})$.

Определим отображение $h\colon K(\gamma_1) \to K(\gamma)$, сопоставив вершине $U \in \gamma_1$ вершину $H(U) \in \gamma$ и взяв в качестве образа $h(x)$ точки x, имеющей в симплексе с вершинами $V_0, \ldots, V_p$ барицентрические координаты $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$, точку $\lambda_0 H(V_0) + \ldots + \lambda_p H(V_p)$ симплекса с вершинами $H(V_0), \ldots, H(V_p)$ (возможны повторения).

VI. Определим отображение $\Gamma_1\colon K^{i+1}(\gamma_1) \to L$, полагая, что его ограничение на подкомплекс $h^{-1}(K^i(\gamma))$ совпадает с отображением Γh, а для произвольного $(i+1)$-мерного симплекса σ комплекса $K^{i+1}(\gamma_1)$, для которого $\dim h(\sigma) = i+1$, возьмем $\Gamma_1|_\sigma = \Gamma_{d(\sigma)h(\sigma)}h$.

Эта формула действительно определяет отображение, так как точка $d(\sigma)$ принадлежит пересечению множеств, являющихся вершинами симплекса $h(\sigma)(V)$. Непрерывность заданного таким образом отображения Γ_1 немедленно следует из непрерывности его ограничения на любой симплекс комплекса $K^{i+1}(\gamma_1)$ и нашего определения топологии симплициального комплекса в 3.5.

VII. Если $U_1 \in \gamma_1$, то $\Gamma_1(U_1) = \Gamma(H(U_1))$ и $U_1 \subset H(U_1)$.

VIII. Пусть σ — симплекс комплекса $K(\gamma_1)$, $U_0, \ldots, U_p$ — его вершины и $t \in U_0 \cap \ldots \cap U_p$.

а. Если $\dim h(\sigma) \leqslant i$, то $\Gamma_1(\sigma) = \Gamma(h(\sigma)) \subset V \cap (\cup\{W\colon W \in$ $\in \lambda(\varepsilon, \mu), W \cap F(t) \neq \varnothing\}$ при некотором $V \in \alpha(\varepsilon)$ (в соответствии с нашими условиями на отображение Γ).

б. Если $\dim \sigma = \dim h(\sigma) = i+1 = p$, то в соответствии с V $d(\sigma) \in H(U_0) \cap \ldots \cap H(U_p)$ и поэтому в силу VI, IV и III

$t \in R_{d(\sigma)} \subset Q_{d(\sigma)} \subset P_{d(\sigma)h(\sigma)}$.

Отсюда следует, что $\Gamma_1(\sigma) = \Gamma_{d(\sigma)h(\sigma)}(h(\sigma)) \subset \cup\{W\colon W \in$ $\in \mu, W \cap F(t) \neq \varnothing\}$. Кроме того, для некоторой точки $y \in \cup s$ $\Gamma_1(\sigma) \subset O_{\theta(y)}y$ (см. II б).

в. Если $p > i+1$, то из б следует, что для некоторой точки $y \in \cup p$ $\Gamma_1(\sigma \cap K^{i+1}(\gamma_1)) \subset O_{3\theta(y)}y$ (см. рассуждение в II) и $\Gamma_1(\sigma \cap$ $\cap K^{i+1}(\gamma_1)) \subset \cup\{W\colon W \in \mu, W \cap F(t) \neq \varnothing\}$.

IX. Для доказательства последнего утверждения леммы надо с учетом последнего утверждения леммы 4.5 повторить наше доказательство, не следя за оценками, связанными с числами $\xi(y)$ и $\theta(y)$.

5.4. Лемма. *Пусть ε и μ — семейства открытых подмножеств пространства L и $\cup s \subset (\cup\varepsilon) \cap (\cup\mu)$. Тогда существует такое вписанное в ε семейство $\delta(\varepsilon)$ открытых подмножеств пространства L, что $\cup s \subset \cup\delta(\varepsilon)$, и если $k\colon X \to L$ — непрерывное отображение и для любой точки $x \in X$ $k(x) \in \cup\{W\colon W \in \delta(\varepsilon), W \cap F(x) \neq \varnothing\}$, то существуют открытое локально конечное покрытие γ пространства X кратности $\leqslant n+2$ и непрерывное отображение $\Gamma\colon K(\gamma) \to L$ такие, что для любого симплекса $\sigma \in K(\gamma)$ с вершинами $U_1, \ldots, U_s$ и любой точки $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_s$ $\Gamma(\sigma) \subset \cup\{W\colon W \in \mu, W \cap F(x) \neq \varnothing\}$ и найдется такое множество $V \in \varepsilon$, что $\Gamma(\sigma) \cup \{k(x)\} \subset V$. Если при этом для любой точки $x \in X$ множество $F(x)$ есть C^n-множество и $L \in \varepsilon$, то можно дополнительно потребовать $L \in \delta(\varepsilon)$.*

Доказательство. I. Для каждой точки $y \in \cup s$ зафиксируем такое число $\xi(y) > 0$, что $3\xi(y)$-окрестность точки y лежит в некотором элементе семейства ε, и положим $\varepsilon_0 = \{O_{\xi(y)}y\colon y \in \cup s\}$. Для $k = 1, \ldots, n+1$ зафиксируем любое семейство ε_k открытых в пространстве L множеств, для которого $\cup s \subset \cup\varepsilon_k$ и которое вписано в семейства ε_{k-1} и $\alpha(\varepsilon_{k-1})$ — последнее строится в соответствии с леммой 5.3. В соответствии с леммой 5.2 строим семейство $\delta(\varepsilon) = \nu(\varepsilon_{n+1})$.

Пусть $\lambda_0 = \mu$. Для $k = 1, \ldots, n+1$ в соответствии с леммой 5.3 строим семейство $\lambda_k = \beta(\varepsilon_{k-1}, \lambda_{k-1})$.

II. Пусть отображение k удовлетворяет условиям, поставленным в формулировке леммы (с описанным в I семейством $\delta(\varepsilon)$).

По лемме 5.2 существует открытое локально конечное покрытие γ_0 пространства X кратности $\leqslant n+2$ и отображение $\Gamma_0\colon \gamma_0 \to L$, удовлетворяющее условию:

для любых элементов $U_1, \ldots, U_p$ покрытия γ_0 и любой точки $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_p$ найдется такое множество $V \in \varepsilon_{n+1}$, что $\{\Gamma(U_1), \ldots, \Gamma(U_p), k(x)\} \subset V$ и $\{\Gamma(U_p)\} \subset \cup\{W\colon W \in \lambda_{n+1}, W \cap F(x) \neq \varnothing\}$.

Но это означает выполнение условия $\langle\gamma_0, 0, \Gamma_0, \varepsilon_{n+1}, \lambda_{n+1}\rangle$ (и, следовательно, условия $\langle\gamma_0, 0, \Gamma_0, \alpha(\varepsilon_n), \beta(\varepsilon_n, \lambda_n)\rangle$). Используя лемму 5.3, определяем последовательно для $i = 1, \ldots, n+1$ покрытие γ_i и отображение $\Gamma_i \colon K^i(\gamma_i) \to L$ таким образом, что выполнено условие $\langle \gamma_i, i, \Gamma_i, \varepsilon_{n+1-i}, \lambda_{n+1-i} \rangle$ (и, следовательно, условие $\langle \gamma_i, i, \Gamma_i, \alpha(\varepsilon_{n-i}), \beta(\varepsilon_{n-i}, \lambda_{n-i}) \rangle$).

III. Возьмем $\gamma = \gamma_{n+1}$ и $\Gamma = \Gamma_{n+1}$. Если σ — симплекс комплекса $K(\gamma)$ с вершинами $U_1, \ldots, U_p$ и $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_p$, то в соответствии с нашим построением $\Gamma(\sigma) \subset \cup\{W \colon W \in \mu, W \cap \cap F(x) \neq \varnothing\}$ (выполнено условие $\langle \gamma, n+1, \Gamma, \varepsilon_0, \mu \rangle$). В соответствии с нашими построениями $U_1 \subset U_0$ и $\Gamma(U_1) = \Gamma_0(U_0)$ для некоторого $U_0 \in \gamma_0$.

В соответствии с II найдется множество $V_1 \in \varepsilon_{n+1}$, содержащее точки $\Gamma_0(U_0)$ и $k(x)$. Семейство ε_{n+1} вписано в семейство ε_0, и поэтому найдется элемент $O_{\xi(y_1)}y_1$ семейства ε_0, содержащий множество V_1 и, следовательно, точки $\Gamma_0(U_0)$ и $k(x)$. С другой стороны, в силу условия $\langle \gamma, n+1, \Gamma, \varepsilon_0, \mu \rangle$ найдется элемент $O_{\xi(y_2)}y_2$ семейства ε_0, содержащий множество $\Gamma(\sigma)$.

Множества $O_{\xi(y_1)}y_1$ и $O_{\xi(y_2)}y_2$ пересекаются (они оба содержат точку $\Gamma(U_1)$), и поэтому, взяв в качестве точки y ту из точек y_1 и y_2, для которой число $\xi(y_i)$ максимально, получаем, что множество $O_{3\xi(y)}y$ содержит оба эти множества, а само оно лежит в некотором элементе семейства ε. Найденный таким образом элемент семейства ε содержит множество $\Gamma(\sigma) \cup \{k(x)\}$.

IV. Последнее утверждение леммы легко выводится из последнего утверждения леммы 5.3. Лемма доказана.

5.5. Лемма. *Пусть ε и μ — семейства открытых подмножеств пространства L и $\cup s \subset (\cup\varepsilon) \cap (\cup\mu)$. Тогда существует такое семейство $\delta(\varepsilon)$ открытых подмножеств пространства L, вписанное в семейство ε, что $\cup s \subset \cup\delta(\varepsilon)$, и если $k \colon X \to L$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее для любой точки $x \in X$ условию $k(x) \in \cup\{W \colon W \in \delta(\varepsilon), W \cap F(x) \neq \neq \varnothing\}$, то существует непрерывное отображение $f \colon X \to L$, удовлетворяющее для любой точки $x \in X$ условию $f(x) \in (\cup \cup\{W \colon W \in \mu, W \cap F(x) \neq \varnothing\}) \cap (\cup\{W \colon k(x) \in W \in \varepsilon\})$. Если при этом для любой точки $x \in X$ множество $F(x)$ есть C^n-множество и $L \in \varepsilon$, то можно дополнительно потребовать $L \in \delta(\varepsilon)$.*

Доказательство. Строим $\delta(\varepsilon)$, γ и Γ в соответствии с леммой 5.4. Пусть $p \colon X \to K(\gamma)$ — каноническое отображение. Полагаем $f = \Gamma p$. Из леммы 3.8 следует непрерывность отображения f. Проверка выполнения остальных условий вполне тривиальна.

5.6. Лемма. *Для любого семейства ε открытых в пространстве L множеств, удовлетворяющего условию $\cup s \subset \cup \varepsilon$, найдется такое семейство $\beta'(\varepsilon)$ открытых в пространстве L множеств, что если отображение $k\colon X \to L$ непрерывно и $k(x) \in \cup\{W\colon W \in \beta'(\varepsilon), W \cap F(x) \neq \varnothing\}$ для любой точки $x \in X$, то найдется такое непрерывное отображение $f\colon X \to L$, что $f(x) \in F(x) \cap (U\{W\colon k(x) \in W \in \varepsilon\})$ для любой точки $x \in X$. Если при этом для любой точки $x \in X$ множество $F(x)$ есть C^n-множество и $L \in \varepsilon$, то можно дополнительно потребовать $L \in \beta'(\varepsilon)$.*

Доказательство. Для каждого $i = 0, 1, \ldots$ и точки $y \in \cup s$ зафиксируем такие числа $\xi(y, i) > 0$, что $\xi(y, 0) < 1$, $6\xi(y, 0)$-окрестность точки y лежит в некотором элементе семейства ε и $\xi(y, i+1) < \xi(y, i)/5$. Обозначим $\eta_i = \{O_{\xi(y,i)}y\colon y \in \cup s\}, \beta'(\varepsilon) = \delta(\eta_1)$, где символ δ употреблен в соответствии с формулировкой леммы 5.5.

Построим отображения $f_i\colon X \to L$, $i = 0, 1, \ldots$, беря для начала $f_0 = k$. Такой выбор обеспечивает при $i = 0$ выполнение условия

$\langle *, i\rangle$ для любой точки $x \in X$

$$f_i(x) \in \cup\{W\colon W \in \delta(\eta_{i+1}), W \cap F(x) \neq \varnothing\}.$$

Пусть построено отображение f_i, удовлетворяющее условию $\langle *, i\rangle$. Для построения отображения f_{i+1} применим лемму 5.5 к отображению f_i в качестве $k, \varepsilon = \eta_{i+1}$ и $\mu = \delta(\eta_{i+2})$. Получаем существование отображения f_{i+1}, удовлетворяющего условию $\langle *, i+1\rangle$ и условию

$\langle **, i+1\rangle$ для любой точки $x \in X$

$$f_{i+1}(x) \in \cup\{W\colon f_i(x) \in W \in \eta_{i+1}\}.$$

В силу условий $\langle **, i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots$, для любой точки $x \in X$ и $i = 1, 2, \ldots$ $\|f_{i+1}(x) - f_i(x)\| < 2 \cdot 5^{-i-1}$, поэтому последовательность функций f_i, $i = 1, 2, \ldots$, является фундаментальной и сходится к некоторой непрерывной функции f. В силу условия

$\langle *, i\rangle$ $\rho(f_i(x), F(x)) < 2\cdot 5^{-i-1}$, поэтому $\rho(f(x), F(x)) = 0$, но это означает, что $f(x) \in F(x)$.

Пусть $x \in X$, $i = 0, 1, \ldots$, $A_i = \{y\colon y \in \cup s, f_i(x) \in O_{\xi(y,i)}y\}$, и $\xi = \sup\{\xi(y,i)\colon y \in A_i\}$. Так как $0 < \xi_i \leqslant 5^{-i} < \infty$, то найдется точка $y_i \in A_i$, для которой $\xi(y_i, i) > \xi_i/2$. Для любой точки $y \in A_i$ $\|f_i(x) - y\| < \xi(y,i) \leqslant \xi_i < 2\xi(y_i,i), \Rightarrow O_{\xi(y,i)}y \subset O_{5\xi(y_i,i)}y_i \subset O_{\xi(y_i,i-1)}y_i$ и из условия $\langle **, i\rangle$ следует, что при $i = 1, 2, \ldots$

$f_{i-1}(x) \in O_{\xi(y_i,i-1)}y_i$, т.е. $y_i \in A_{i-1}$, поэтому

$$\cup\{W\colon f_i(x) \in W \in \eta_i\} \subset \cup\{W\colon f_{i-1}(x) \in W \in \eta_{i-1}\} \subset \\ \subset \ldots \subset \cup\{W\colon k(x) \in W \in \eta_0\} \subset O_{5\xi(y_0,0)}y_0.$$

Таким образом, $\{f(x), k(x)\} \subset [O_{5\xi(y_0,0)}] \subset O_{6\xi(y_0,0)} \subset V \in \varepsilon$.

Доказательство последнего утверждения очевидно (см. предыдущие леммы). Лемма доказана.

§ 6. Теорема о продолжении селекции для отображения со значениями из экви-LC^n-семейства

6.1. Последняя лемма предыдущего параграфа остается справедливой, если фигурирующее в ней банахово пространство L заменить на произвольное полное метрическое пространство Y. Это следует из самой обсуждаемой леммы и из теоремы V.1.8, в которой доказывается существование изометрического вложения произвольного метрического пространства Y в некоторое банахово пространство L. При таком вложении экви-LC^n-семейство подмножеств пространства Y переходит в экви-LC^n-семейство L, а отображения F и k заменяем на их композицию с вложением. Единственное, на чем надо при этом остановиться, так это на проверке замкнутости образов точек при композиции отображения F с вложением при условии полноты пространства Y, т. е. доказать следующую лемму.

6.2. Лемма. *Пусть $g\colon X \to Y$ — изометрическое отображение полного метрического пространства X в метрическое пространство Y. Тогда для любого замкнутого подмножества F пространства X множество $g(F)$ замкнуто в пространстве Y.*

Доказательство. Пусть $y \in [g(F)]$. Тогда найдется такая последовательность $\{x_n\colon n = 1,2,\ldots\}$ точек множества F, что $y = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$. Следовательно, последовательность $\{g(x_n)\colon n = 1,2,\ldots\}$ — фундаментальная. Но так как отображение g является изометрическим, то последовательность $\{x_n\colon n = 1,2,\ldots\}$ — также фундаментальная. Из полноты пространства X, замкнутости множества F и предложения I.3.24 следует существование предела $x \in F$ последовательности $\{x_n\colon n = 1,2,\ldots\}$. Но тогда $y = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = g(x)$. Ввиду произвольности точки $y \in [g(F)]$ лемма доказана.

6.3. Однако в дальнейшем лемма 5.6 понадобится только в том виде, в каком она сформулирована. Сделанное же замечание послужит моделью при сведении изучения общего случая отображения в полное метрическое пространство к частному случаю отображения в банахово пространство.

6.4. Лемма. *Пусть A — замкнутое подмножество топологического пространства X, многозначные отображения $F\colon X \to Y$ и $G\colon A \to Y$ в топологическое пространство Y полунепрерывны снизу, и $G(x) \subset F(x)$ для любой точки $x \in A$. Тогда отображение $H\colon X \to Y$,*

$$H(x) = \begin{cases} G(x), \text{ если } x \in A; \\ F(x), \text{ если } x \in X \setminus A \end{cases}$$

полунепрерывно снизу.

Доказательство. Пусть U — произвольное открытое подмножество пространства Y. Имеем $G^{-1}(U) \subset F^{-1}(U) \cap A$, поэтому множество $V = G^{-1}(U) \cup (F^{-1}(U) \setminus A) = F^{-1}(U) \setminus (A \setminus G^{-1}(U))$ открыто в пространстве X. Осталось заметить, что $H^{-1}(U) = V$. Лемма доказана.

Заметим, что с частным случаем рассмотренной в лемме ситуации мы имели дело в следствии 2.10.

6.5. Теорема Майкла. *Пусть $F\colon X \to Y$ — многозначное полунепрерывное снизу отображение паракомпакта X в полное метрическое пространство Y, s — экви-LC^n-семейство подмножеств пространства Y и для любой точки $x \in X$ непустое замкнутое множество $F(x)$ принадлежит семейству s. Пусть A — замкнутое подмножество паракомпакта*

пакта X и $\dim B \leqslant n+1$ для любого замкнутого в пространстве X множества $B \subset X \setminus A$. Тогда для любой непрерывной селекции g отображения $F|_A$ найдется такая окрестность U множества A в пространстве X, что селекция g продолжается до непрерывной селекции отображения $F|_U$. Если при этом для любой точки $x \in X$ множество $F(x)$ удовлетворяет условию C^n, то селекцию g можно продолжить на все пространство X (т. е. можно положить $U = X$).

Доказательство. В соответствии с замечанием 6.1–6.3 предполагаем, что Y — банахово пространство. В соответствии с этим для удобства ссылок на ранее доказанные утверждения обозначим его L.

Семейство $s^* = s \cup \{\{y\} \colon y \in \cup s\}$ также является экви-LC^n-семейством. Это дает возможность предполагать в дальнейшем, что семейство s содержит все одноточечные подмножества множества $\cup s$.

I. По следствию 2.10 существует непрерывное отображение $k \colon X \to L$, продолжающее отображение g. Для $x \in X$ положим $r(x) = \rho(k(x), F(x))$.

Пусть $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. По определению числа $r(x)$ множество $V = O_{r(x)+\varepsilon/2}k(x)$ пересекается с множеством $F(x)$. Из полунепрерывности снизу отображения F следует, что множество $W = F^{-1}(V)$ — окрестность точки x. Пусть $Ox = W \cap \cap k^{-1}(O_{\varepsilon/2}k(x))$. Если $t \in Ox$, то найдется точка $y \in V \cap F(t)$ и, следовательно,

$$\|k(t) - y\| \leqslant \|k(t) - k(x)\| + \|k(x) - y\| < \\ < (\varepsilon/2) + r(x) + (\varepsilon/2) = r(x) + \varepsilon,$$

поэтому $r(t) < r(x) + \varepsilon$. Таким образом, для любого $a > 0$ множество $r^{-1}([0, a))$ открыто.

II. Для $x \in A$ имеем $r(x) = 0$.

Построим последовательно окрестности $U_m^*, m = 0, 1, \ldots$ множества A. Для начала положим $U_0^* = X$. Пусть построено множество U_m^*. В качестве U_{m+1}^* возьмем любую окрестность множества A, замыкание которой лежит в открытом множестве $U_m^* \cap \cap r^{-1}([0, 2^{-m-1}))$.

Множество $A_1 = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} U_m^* = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} [U_m^*]$ замкнуто и содержит множество A. Для любой точки $x \in A_1$ $r(x) = 0$ и, следовательно, $k(x) \in F(x)$.

III. Пусть для $m = 1, 2, \ldots$ $\varepsilon_m = \{O_{2^{-m-1}}y \colon y \in \cup s\}$. Строим в соответствии с леммой 5.6 семейства $\beta'(\varepsilon_m)$ и $\beta_m = \beta'(\beta'(\varepsilon_m))$. Как легко видеть, мы можем дополнительно предположить, что семейство β_m вписано в семейство $\beta'(\varepsilon_m)$, а последнее — в семейства ε_m и β_{m-1}. Обратим внимание, что выбор покрытий в леммах § 5 осуществляется независимо от фигурирующих в них пространства X и отображений k и F.

В силу непрерывности отображения k и полунепрерывности снизу отображения F множество $U_m^{**} = \cup\{\{x\colon x \in X, k(x) \in V, F(x) \cap V \neq \varnothing\}\colon V \in \beta_m\}$ открыто. Оно, очевидно, содержит множество A_1. Построим последовательно множества U_m, $m = 1, 2, \ldots$, положив для начала $U_0 = X$ и беря в качестве U_{m+1} любую окрестность множества A_1, замыкание которой лежит в множестве $U_{m+1}^* \cap U_{m+1}^{**} \cap U_m$. Имеем $A_1 = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} [U_m]$.

Определим отображение $H\colon X \to L$. Если $x \in A_1$, то положим $H(x) = \{k(x)\}$. Если $x \in X \setminus A_1$, то положим $H(x) = F(x)$.

IV. Если $x \in [U_m]$, то

$$\cup\{V\colon k(x) \in V \in \beta_m\} \cap H(x) \neq \varnothing \text{ и}$$

$$(*) \cup \{V\colon k(x) \in V \in \beta_m\} \subseteq O_{2^{-m}}k(x).$$

Зафиксируем окрестность U множества A_1, замыкание которой лежит в множестве U_1.

Пусть для $n = 0, 1, 2, \ldots$ $B_n = ([U_n] \setminus U_{n+1}) \cap [U]$. Множество B_n замкнуто в паракомпакте X, поэтому паракомпактно. Оно лежит в множестве $X \setminus A$, поэтому $\dim B_n \leqslant n+1$. По лемме 5.6 существует непрерывная селекция $h_n\colon B_n \to L$ отображения $H|_{B_n}$. Рассмотрим многозначное отображение $H_n\colon B_n \to L$,

$$H_n(x) = \begin{cases} \{h_{n-1}(x)\}, & \text{если } x \in B_{n-1} \cap B_n; \\ \{h_{n+1}(x)\}, & \text{если } x \in B_{n+1} \cap B_n; \\ H(x), & \text{если } x \in B_n \setminus (B_{n-1} \cup B_{n+1}) \subset U_n \setminus [U_{n+1}]. \end{cases}$$

Из леммы 6.4 следует, что это отображение полунепрерывно снизу (на подпространстве B_n). По лемме 5.6 (напомним, что для любой точки $x \in B_n$ множество $\cup\{V\colon k(x) \in V \in \beta'(\varepsilon_m)\} \cap \cap H_m(x)$ непусто, см. IV), существует непрерывная селекция $h_n^*\colon B_n \to L$ отображения H_n.

При этом в силу нашего построения, если $x \in B_{n-1} \cap B_n$, то $h_n^*(x) = h_{n-1}(x)$ и $h_{n-1}^*(x) = h_n(x)$.

Из предложения I.1.15 теперь следует непрерывность функции $h\colon [U] \setminus A_1 \to L$, определенной следующим образом: $h|_{B_n} = h_n$ при n нечетном и $h|_{B_n} = h_n^*$ при n четном.

Функция h — селекция для отображения H на множестве $[U] \setminus A_1$. Из (*) теперь следует непрерывность функции $g\colon [U] \to L$, определенной следующим образом: $g|_{A_1} = k$, $g|_{[U]\setminus A_1} = h$. Ограничение функции g на множество U и есть искомая селекция.

V. Если для любой точки $x \in X$ множество $F(x)$ удовлетворяет условию C^n, то, используя заключительное утверждение леммы 5.6, получаем непрерывную селекцию для отображения $H^*\colon X \setminus U \to L$:

$$H^*(x) = \begin{cases} \{g(x)\}, & \text{если } x \in [U] \setminus U; \\ F(x), & \text{если } x \in X \setminus [U], \end{cases}$$

которая продолжает селекцию g на все пространство X.

6.6. Следствие. *Пусть A — замкнутое подпространство паракомпакта X, $f\colon A \to Y$ — непрерывное отображение подпространства A в полное метрическое пространство Y, удовлетворяющее условию LC^n. Пусть $\dim B \leqslant n+1$ для любого замкнутого подмножества B пространства X, лежащего в множестве $X \setminus A$. Тогда найдется такая окрестность U множества A в пространстве X, что отображение f продолжается до непрерывного отображения $g\colon U \to Y$. Если при этом пространство Y удовлетворяет условию C^n, то отображение f можно продолжить на все пространство X.*

Для получения следствия из теоремы рассматриваем многозначное отображение F, тождественно равное Y.

§ 7. Полунепрерывные сверху отображения

7.1. Прежде чем приступать к определению полунепрерывных сверху многозначных отображений, посмотрим, что получится, если ввести понятие, «симметричное» понятию полунепрерывного снизу многозначного отображения.

Назовем многозначное отображение $F\colon X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y *слабо полунепрерывным сверху в точке* $x \in X$, если $\overline{\lim_{t\to x}} F(t) \subset F(x)$, *слабо полунепрерывным сверху* (на всем пространстве X), если оно слабо полунепрерывно сверху в каждой точке пространства X.

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Функция f, рассматриваемая как многозначное отображение, слабо полунепрерывна сверху, но не непрерывна в обычном смысле. Естественно поставить целью выделение класса многозначных отображений, близкого к классу слабо полунепрерывных сверху отображений, но такого, чтобы любое однозначное отображение, входящее в этот класс, было непрерывным. Для этого воспользуемся наблюдением, содержащимся в теореме IV.1.8, аналогично тому, как мы поступили при введении топологии Виеториса.

7.2. Многозначное отображение $F\colon X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y назовем *полунепрерывным сверху в точке* $x \in X$, если для любой окрестности U множества $F(x)$ найдется такая окрестность V точки x, что $F(V) \subset U$, и *полунепрерывным сверху* (на всем пространстве X), если оно полунепрерывно сверху в каждой точке пространства X.

Из теоремы IV.1.8 следует

7.3. Теорема. *Пусть $F\colon X \to Y$ — многозначное отображение топологического пространства X в бикомпакт Y. Тогда:*

а) *если отображение F слабо полунепрерывно сверху в точке $x \in X$, то оно полунепрерывно сверху в точке x,*

б) *если отображение F слабо полунепрерывно сверху, то оно полунепрерывно сверху.*

7.4. Теорема. *Всякое полунепрерывное сверху многозначное отображение слабо полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Утверждение сразу следует из теоремы IV.1.6.

7.5. Теорема. *Пусть $F: X \to Y$ — многозначное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *отображение F полунепрерывно сверху;*

б) *для любого открытого в пространстве Y множества U множество $\{x: x \in X, F(x) \subset U\}$ открыто в пространстве X;*

в) *для любого замкнутого в пространстве Y множества H множество $F^{-1}(H)$ замкнуто в пространстве X.*

Доказать самим.

7.6. Теорема. *Пусть $F_1, F_2: X \to Y$ — многозначные отображения топологического пространства X в топологическое пространство Y и для $x \in X$ $F(x) = F_1(x) \cup F_2(x)$. Если отображения F_1 и F_2 полунепрерывны сверху в точке $x \in X$, то и отображение F полунепрерывно сверху в точке x.*

Доказать самим.

7.7. Теорема. *Пусть $F_1, F_2: X \to Y$ — многозначные отображения, сопоставляющие точкам топологического пространства X замкнутые подмножества нормального пространства Y и полунепрерывные сверху в точке $x \in X$. Тогда отображение $F: X \to Y$, $F(x) = F_1(x) \cap F_2(x) (\neq \varnothing)$, полунепрерывно сверху в точке x.*

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность множества $F(x)$. Множества $H_i = F_i(x) \setminus U$, $i = 1, 2$, замкнуты в пространстве Y и не пересекаются. В силу нормальности пространства Y найдутся непересекающиеся окрестности U_i, $i = 1, 2$, этих множеств. Пусть $V_i = U_i \cup U$. Имеем $F_i(x) \subset V_i$. В силу полунепрерывности сверху отображения F_i найдется такая окрестность $O_i x$ точки x, что $F(O_i x) \subset V_i$. Пусть $Ox = O_1 x \cap O_2 x$. Для $t \in Ox$ имеем

$$F(t) = F_1(t) \cap F_2(t) \subset V_1 \cap V_2 = (U_1 \cup U) \cap (U_2 \cup U) = (U_1 \cap U_2) \cup U = \varnothing \cup U = U.$$

Теорема доказана.

7.8. Замечание. Ограничение полунепрерывного сверху многозначного отображения на подпространство полунепрерывно сверху. Композиция двух полунепрерывных сверху многозначных отображений полунепрерывна сверху.

Доказать самостоятельно.

7.9. Замечание. Пусть $f\colon X \to Y$ — однозначное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y. Рассматриваемое как многозначное, оно полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда оно непрерывно как однозначное отображение. Если для $y \in Y$ $F(y) = f^{-1}(y)$, то отображение F полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда отображение f замкнуто, — это следует, например, из теоремы 7.5 в).

7.10. Теорема. *Пусть $F\colon X \to Y$ — многозначное полунепрерывное сверху отображение бикомпактного пространства X в топологическое пространство Y и для любой точки $x \in X$ множество $F(x)$ бикомпактно. Тогда образ $F(X)$ пространства X бикомпактен.*

Доказательство. Пусть γ — произвольное покрытие множества $F(X)$ открытыми в пространстве Y множествами, γ^* – множество всех конечных подмножеств множества γ. Пусть $V_\delta = \{x\colon x \in X, F(x) \subset \cup\delta\}$ для $\delta \in \gamma^*$. По теореме 7.5 множество V_δ открыто. В силу того, что γ есть открытое покрытие множества $F(X)$ и для любого $x \in X$ множество $F(x)$ бикомпактно, $X \subset \cup\{V_\delta\colon \delta \in \gamma^*\}$. В силу бикомпактности пространства X из открытого покрытия $\{V_\delta\colon \delta \in \gamma^*\}$ пространства X можно выбрать конечное подпокрытие $\{V_{\delta_1}, \ldots, V_{\delta_s}\}$. Теперь, очевидно, $\delta = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \delta_i$ — конечное подпокрытие покрытия γ множества $F(X)$. Теорема доказана.

7.11. Теорема. *Пусть $F\colon X \to Y$ — многозначное полунепрерывное сверху (соответственно, снизу) отображение связного топологического пространства X в топологическое пространство Y, и для любой точки $x \in X$ множество $F(x)$ связно. Тогда множество $F(X)$ связно.*

Доказательство. Без ущерба для общности дополнительно предположим, что $Y = F(X)$. Допустим, что множество Y несвязно. Тогда найдутся непустые подмножества H_1, H_2 пространства Y, которые открыты и замкнуты одновременно и удовлетворяют условиям $H_1 \cap H_2 = \varnothing$ и $H_1 \cup H_2 = Y$. Для любой точки $x \in X$ в силу связности множества $F(x)$ из $F(x) \cap \cap H_i \neq \varnothing$, $i = 1$ или 2, следует, что $F(x) \subset H_i$. Таким образом, $F^{-1}(H_i) = \{x\colon x \in H, F(x) \subset H_i\}$ и $F^{-1}(H_i) \neq \varnothing$, $F^{-1}(H_1) \cap \cap F^{-1}(H_2) = \varnothing$, $F^{-1}(H_1) \cup F^{-1}(H_2) = X$. Из полунепрерывности сверху (соответственно, снизу) отображения F следует, что эти множества замкнуты (соответственно, открыты) в пространстве X, а отсюда следует, что пространство X несвязно, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает теорему.

7.12. Теорема. *Пусть $F\colon X \to Y$ — многозначное отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y, $x \in X$, множество $F(x)$ компактно. Отображение F полунепрерывно сверху в точке x тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ точек пространства X, сходящейся к точке x, из любой последовательности точек $y_n \in F(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке множества $F(x)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $X_0 = \{0\} \cup \cup \{2^{-n}\colon n = 1, 2, \ldots\}$. Отображение $f\colon X_0 \to X$, $f(2^{-n}) = x_n$ при $n = 1, 2, \ldots$ и $f(0) = x$ непрерывно. В силу замечания 7.9 отображение $G = Ff\colon X_0 \to Y$ полунепрерывно сверху. Отсюда сразу следует, что полунепрерывно сверху отображение $G_0\colon X_0 \to Y$, $G_0(2^{-n}) = \{y_n\}$ при $n = 1, 2, \ldots$ и $G_0(0) = G(0) = F(x)$. По теореме 7.10 множество $G_0(X_0)$ компактно. В силу теоремы I.4.4 множество $\{y_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ имеет предельную точку y. Теперь стандартным построением из последовательности $\{y_n\colon n = = 1, 2, \ldots\}$ выбираем последовательность $\{y_{n_k}\colon k = 1, 2, \ldots\}$, сходящуюся к точке y. Имеем $y \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} (\{y_{n_k}\colon k = m, m+1, \ldots\} \cup \cup F(x)) = F(x)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Допустим, что отображение F не является полунепрерывным сверху в точке x. Это означает, что найдется такая окрестность V множества $F(x)$ в пространстве Y, что для любого $n = 1, 2, \ldots$ $F(O_{2^{-n}}x) \not\subset V$. Последнее означает существование точек $x_n \in O_{2^{-n}}x$ и $y_n \in F(x_n) \setminus V$. Все точки последовательности $\{y_n \colon n = 1, 2, \ldots\}$ лежат вне окрестности V множества $F(x)$, и поэтому из нее нельзя выбрать подпоследовательность, сходящуюся к какой-нибудь точке множества $F(x)$. Достаточность, а с ней и теорема в целом доказаны.

§ 8. Связь с топологией Виеториса

8.1. Как уже отмечалось, многозначное отображение $F\colon X \to Y$ можно рассматривать в качестве однозначного отображения в множество всех подмножеств множества Y. Пусть X и Y — топологические пространства, а значения отображения F — непустые замкнутые подмножества пространства Y. В этом случае соответствующее однозначное отображение оказывается отображением в пространство $\exp Y$.

8.2. Теорема. *Пусть $F\colon X \to Y$ — многозначное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y, и для любой точки $x \in X$ множество $F(x)$ непусто и замкнуто. Отображение $f\colon X \to \exp Y$, $f(x) = F(x) \in \exp Y$ (т. е. отображение F, рассматриваемое как однозначное отображение пространства X в пространство $\exp Y$ с топологией Виеториса) непрерывно тогда и только тогда, когда отображение F одновременно полунепрерывно снизу и сверху.*

Доказательство. Необходимость. Пусть U — произвольное открытое подмножество пространства Y. Из полунепрерывности снизу отображения F и теоремы 1.4 следует, что множество

$$(*)\qquad f^{-1}(O\langle U, X\rangle) = \{x \colon x \in X, F(x) \cap U \neq \varnothing\} = F^{-1}(U)$$

открыто в пространстве X. Из полунепрерывности сверху отображения F и теоремы 7.5 следует, что множество

$$(**)\qquad f^{-1}(O\langle U\rangle) = \{x \colon x \in X, F(x) \subset U\}$$

открыто в пространстве X. Но множества вида $O\langle U\rangle$ и $O\langle U,X\rangle$ составляют предбазу топологии Виеториса (см. IV.3.1–3.2, и поэтому из предложения I.1.19 следует непрерывность отображения f. Необходимость доказана.

Достаточность. Из непрерывности отображения f следует открытость множеств (*) и (**), где U — произвольное открытое подмножество пространства Y. Из открытости множеств вида (*) и теоремы 1.4 следует полунепрерывность снизу отображения F. Из открытости множеств вида (**) по теореме 7.5 следует полунепрерывность сверху отображения F. Достаточность, а вместе с ней и теорема в целом доказаны.

Глава VII

КОВАРИАНТНЫЕ ФУНКТОРЫ В КАТЕГОРИИ БИКОМПАКТОВ

§ 1. Функторы экспоненциального типа

1.1. В главе IV вводилось пространство $\exp X$ непустых замкнутых подмножеств пространства X, наделенное топологией Виеториса. Было рассмотрено также его подпространство $\exp_c X$, состоящее из бикомпактных подмножеств X. В этой главе основной категорией будет категория Comp, состоящая из всех бикомпактов и всех их непрерывных отображений. Поэтому совпадающие бикомпакты $\exp X$ и $\exp_c X$ обозначаем $\exp X$. Пространство $\exp X$ назовем *экспонентой* бикомпакта X или *гиперпространством* его замкнутых подмножеств.

Пространства $\exp_n X$ (см. гл. IV, § 4) рассматриваем только для натуральных значений n. Через $\exp^c X$ обозначим подпространство $\exp X$, состоящее из всех подконтинуумов (связных бикомпактов) пространства X. Пространство $\exp^c X$, называемое *континуальной экспонентой* пространства X или *гиперпространством его подконтинуумов*, согласно IV.8.8 замкнуто в $\exp X$ и, следовательно, является бикомпактом. В тех случаях, когда это не приводит к путанице, следы базисных множеств $O\langle U_1, \dots, U_m\rangle \subset \exp X$ на пространствах $\exp_n X$ и $\exp^c X$ также обозначаем $O\langle U_1, \dots, U_m\rangle$.

1.2. Отображение $\exp f$. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение и $C \in \exp X$. Положим

$$(\exp f)(C) = f(C). \tag{1}$$

Равенство (1) определяет отображение $\exp f\colon \exp X \to \exp Y$. Это отображение непрерывно. В самом деле, это вытекает из непосредственно проверяемой формулы

$$(\exp f)^{-1}O\langle U_1, \dots, U_m\rangle = O\langle f^{-1}U_1, \dots, f^{-1}U_m\rangle. \qquad (2)$$

Отметим, что если $f\colon X \to Y$ — эпиморфизм, то $\exp f$ также является эпиморфизмом.

1.3. Предложение. *Операция* exp — *ковариантный функтор в категории* Comp.

Доказательство сводится к автоматической проверке равенств

$$\exp(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\exp X}$$

и

$$\exp(g \circ f) = (\exp g) \circ (\exp f).$$

1.4. Пусть $\mathscr{F}_i\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$, $i = 1, 2$, — два ковариантных функтора из категории $\mathscr{C} = (\mathscr{O}, \mathfrak{M})$ в категорию $\mathscr{C}' = (\mathscr{O}', \mathfrak{M}')$. Семейство морфизмов

$$\Phi = \{f_X\colon \mathscr{F}_1(X) \to \mathscr{F}_2(X), X \in \mathscr{O}\} \subset \mathfrak{M}'$$

называется *естественным преобразованием* функтора $\mathscr{F}_1$ в функтор $\mathscr{F}_2$, если для всякого морфизма $f\colon X \to Y$ категории $\mathscr{C}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_1(X) \arrow[r, "f_X"] \arrow[d, "\mathscr{F}_1(f)"'] & \mathscr{F}_2(X) \arrow[d, "\mathscr{F}_2(f)"] \\ \mathscr{F}_1(Y) \arrow[r, "f_Y"] & \mathscr{F}_2(Y) \end{tikzcd} \qquad (3)$$

1.5. Пусть $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ — функторы, действующие из категории Comp в себя (в этом случае скажем, что функтор действует в категории Comp). Функтор $\mathscr{F}_1$ называется *подфунктором* (*надфунктором*) функтора $\mathscr{F}_2$, если существует такое естественное преобразование $\Phi = \{f_X\}\colon \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$, что всякое отображение f_X — вложение (эпиморфизм). Во втором случае функтор $\mathscr{F}_2$ называется *фактор-функтором* функтора $\mathscr{F}_1$.

1.6. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение и $C \in \exp_n X$ (соответственно $C \in \exp^c X$). Тогда $f(C) \in \exp_n Y$ (соответственно $f(C) \in \exp^c Y$). Следовательно, $(\exp f)(\exp_n X) \subset$

$\subset \exp_n Y$ (соответственно $(\exp f)(\exp^c X) \subset \exp^c Y$). Значит, полагая

$$\exp_n f = \exp f|\exp_n X \text{ и}$$

$$\exp^c f = \exp f|\exp^c X,$$

получаем отображения

$$\exp_n f\colon \exp_n X \to \exp_n Y \text{ и}$$

$$\exp^c f\colon \exp^c X \to \exp^c Y.$$

1.7. Предложение. *Операции* $\exp_n$ *и* $\exp^c$ *суть функторы, являющиеся подфункторами функтора* exp.

В самом деле, функториальность операций $\exp_n$ и $\exp^c$ вытекает из 1.3 и определения отображений $\exp_n f$ и $\exp^c f$. С другой стороны, тождественные вложения $\exp_n X \hookrightarrow \exp X$ и $\exp^c X \hookrightarrow \exp X$ являются естественными преобразованиями, переводящими функторы $\exp_n$ и $\exp^c$ в функтор exp.

Согласно IV.4.4 пространство X естественно отождествляется с $\exp_1 X$. Поэтому из предложения 1.7 вытекает

1.8. Следствие. *Тождественный функтор* Id *является подфунктором функтора* exp.

1.9. Функтор $\prod^n$ — это функтор, ставящий в соответствие каждому пространству X его n-ю степень X^n (n конечно), а каждому отображению f — его n-ю степень (произведение n экземпляров отображения f (см. II.1.10)). Очевидно, что $\prod^n$ — ковариантный функтор.

1.10. Предложение. *Функтор* $\exp_n$ *является фактор-функтором функтора* $\prod^n$.

Доказательство. Определим отображение $\pi^n = \pi^n_X\colon X^n \to \exp_n X$ равенством

$$\pi^n(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Ясно, что π^n есть отображение на все пространство $\exp_n X$ и в случае его непрерывности удовлетворяет условию (3) естественного преобразования. Непрерывность отображения π^n вытекает из очевидных равенств

$$(\pi^n)^{-1}O\langle U\rangle = \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}U, \quad (\pi^n)^{-1}O\langle U, X\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} p_i^{-1}U,$$

где p_i — проектирование произведения X^n на i-й сомножитель.

1.11. Пусть $\mathscr{F}$ — ковариантный функтор, действующий в категории Top, и пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}\}$ — обратный спектр. Положим

$$\mathscr{F}(S) = \{\mathscr{F}(X_\alpha), \mathscr{F}(\pi^\alpha_{\alpha'})\}.$$

Тогда $\mathscr{F}(S)$ — также обратный спектр. Обозначим его сквозные проекции $\pi^{\mathscr{F}}_\alpha$.

Функтор $\mathscr{F}$ называется *непрерывным*, если $\mathscr{F}(\lim S) = \lim \mathscr{F}(S)$ для всякого спектра S. Более точно это означает, что существует гомеоморфизм $f\colon \mathscr{F}(\lim S) \to \lim \mathscr{F}(S)$, для которого

$$\mathscr{F}(\pi_\alpha) = \pi^{\mathscr{F}}_\alpha \circ f. \tag{4}$$

Отметим, что отображение f, удовлетворяющее условию (4), всегда существует и единственно. Это — предел отображений $\mathscr{F}(\pi_\alpha)$ (см. гл. III, § 1). Другими словами, функтор $\mathscr{F}$ непрерывен, если предел отображений $\mathscr{F}(\pi_\alpha)$ — гомеоморфизм.

Из определений непрерывного спектра (III.2.2) и непрерывного функтора непосредственно вытекает

1.12. Предложение. *Непрерывные функторы переводят непрерывные спектры в непрерывные.*

1.13. Предложение. *Функторы* exp, $\exp^c$, $\exp_n$, $\prod^n$ *непрерывны.*

Доказательство проведем для функтора exp. Остальные случаи читатель рассмотрит самостоятельно. Пусть $X = \lim S$. Достаточно показать, что отображение

$$f = \lim_\alpha \exp \pi_\alpha\colon \exp X \to \lim \exp(S)$$

взаимно однозначно и «на». Если $C_1, C_2 \in \exp X$ и $C_1 \neq C_2$, то существует такое α, что $\pi_\alpha(C_1) \neq \pi_\alpha(C_2)$. Тогда из условия

(4) вытекает, что $f(C_1) \neq f(C_2)$. Пусть теперь $C \in \lim \exp(S)$. Положим

$$D = \bigcap_\alpha \pi_\alpha^{-1} \pi_\alpha^{\exp}(C).$$

Тогда $D \in \exp X$ и $f(D) = C$. Предложение доказано.

1.14. Функтор $\mathscr{F}$ назовем *открытым*, если он переводит открытые отображения в открытые.

1.15. Предложение. *Функторы* $\exp_2$ *и* $\exp$ *открыты.*

Доказательство. Пусть отображение $f\colon X \to Y$ открыто и $\{x_1, x_2\} \in \exp_2 X$. Ясно, что базу в точке $\{x_1, x_2\}$ образуют множества вида $O\langle U_1, U_2\rangle$, где $U_i \ni x_i$. Если $f(x_1) \neq \neq f(x_2)$, то возьмем такие $U_i \ni x_i$, что $f(U_1) \cap f(U_2) = \varnothing$. Тогда $\exp_2 f(O\langle U_1, U_2\rangle) \supset O\langle f(U_1), f(U_2)\rangle$. В самом деле, если $\{y_1, y_2\} \in O\langle f(U_1), f(U_2)\rangle$, то после перенумерации можно считать, что $y_i \in f(U_i)$. Взяв $z_i \in U_i$ так, чтобы $f(z_i) = y_i$, получаем $\{z_1, z_2\} \in O\langle U_1, U_2\rangle$ и $\exp_2 f\{z_1, z_2\} = \{y_1, y_2\}$.

Если $f(x_1) = f(x_2)$, то возьмем такие $U_i \ni x_i$, что $f(U_1) = = f(U_2)$. Тогда снова $\exp_2 f(O\langle U_1, U_2\rangle) \supset O\langle f(U_1)\rangle$.

Наконец, для отображения $\exp f$ имеет место равенство

$$\exp f(O\langle U_1, \ldots, U_m\rangle) = O\langle f(U_1), \ldots, f(U_m)\rangle.$$

Включение $\subset$ очевидно. Пусть теперь $C \in O\langle f(U_1), \ldots, f(U_m)\rangle$. Для каждой точки $y \in C$ возьмем точку $x_y \in X$, которая вместе с некоторой окрестностью Ox_y содержится в некотором U_j. Можно считать даже, что $[Ox_y] \subset U_j$. Из покрытия $\{f(Ox_y)\colon y \in C\}$ множества C выберем конечное подпокрытие $\{f(Ox_{y_i})\colon i = 1, \ldots \ldots, n\}$. Положим $D' = f^{-1}(C) \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} [Ox_{y_i}])$. Имеем $f(D') = C$ и $D' \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} U_j$.

Возьмем теперь в каждом множестве U_j по точке x_j так, чтобы $f(x_j) \in C$, и положим $D = D' \cup \{x_1, \ldots, x_m\}$. Тогда $D \in \in O\langle U_1, \ldots, U_m\rangle$ и $(\exp f)(D) = C$.

1.16. Функторы $\exp^c$ и $\exp_n$ при $n \geqslant 3$ не являются открытыми. Читатель сам может убедиться в том, что применение этих функторов к двукратному накрытию окружности окружностью не дает нам открытых отображении.

§ 2. Экспоненты канторовых дисконтинуумов

2.1. Лемма. *Если множество U открыто-замкнуто в X, то $O\langle U\rangle$ и $O\langle U, X\rangle$ открыто-замкнуты в* $\exp X$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться равенством

$$O\langle V\rangle = \exp X \setminus O\langle X \setminus V, X\rangle,$$

очевидно выполненным для всякого открыто-замкнутого $V \subset X$.

Из IV.3.2 и 2.1 вытекает

2.2. Предложение. *Если бикомпакт X нульмерен, то бикомпакт* $\exp X$ *также нульмерен.*

2.3. Теорема. *Компакты* $D^\omega, \exp(D^\omega)$ *и* $\exp_n(D^\omega)$ *гомеоморфны.*

Для доказательства надо заметить только, что $\exp(D^\omega)$ и $\exp_n(D^\omega)$ не имеют изолированных точек. Все остальное вытекает из 2.2, IV.5.3 и II.5.29.

Ниже увидим (гл. VIII), что бикомпакты D^{ω_1}, $\exp(D^{\omega_1})$ и $\exp_2(D^{\omega_1})$ также гомеоморфны. Но этим все положительные утверждения исчерпываются.

2.4. Предложение. *Бикомпакты* D^{ω_2} *и* $\exp(D^{\omega_2})$ *не гомеоморфны.*

Доказательство. Согласно III.2.11 дисконтинуум D^{ω_2} можно представить в виде предела непрерывного спектра $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'} : \alpha < \omega_2\}$, все проекции которого гомеоморфны проектированию $\pi\colon D^{\omega_1} \times D^{\omega_1} \to D^{\omega_1}$. Согласно непрерывности функтора exp (см. 1.13) бикомпакт $\exp(D^{\omega_1})$ является пределом спектра $\exp(S)$.

Все проекции этого спектра гомеоморфны $\exp\pi$. Теперь предположим, что D^{ω_2} и $\exp(D^{\omega_2})$ гомеоморфны. Тогда по спектральной теореме о гомеоморфизме (III.3.12) спектры S и $\exp(S)$ содержат изоморфные конфинальные подспектры. Это влечет гомеоморфность отображений π и $\exp\pi$. Но прообразы всех точек при отображении π гомеоморфны D^{ω_1} и, значит, удовлетворяют условию Суслина (II.6.15). В то же время существует замкнутое множество $F \subset D^{\omega_1}$, не удовлетворяющее условию Суслина. В качестве такого множества можно взять замыкание дискретного множества N_{ω_1}, которое лежит в D^{ω_1} согласно II.5.23.

Покажем теперь, что прообраз $(\exp\pi)^{-1}F$ множества F не удовлетворяет условию Суслина. Поскольку дисконтинуум D^{ω_1} нульмерен (II.5.19), существует такое несчетное семейство $\{U_\beta\}$ открыто-замкнутых в D^{ω_1} множеств, что $U_\beta\cap F\neq\varnothing$ и $U_\beta\cap\cap F\cap U_\gamma=\varnothing$ при $\beta\neq\gamma$. Пусть A и B — непустые непересекающиеся открытые в D^{ω_1} множества. Положим $V_\beta=O\langle U_\beta\times\times A,(D^{\omega_1}\setminus U_\beta)\times B\rangle\cap(\exp\pi)^{-1}F$. Семейство $\{V_\beta\}$ состоит из открытых непустых множеств. В самом деле, если $x\in A, y\in B$, то $C=(F\cap U_\beta)\times\{x\}\cup(F_1\setminus U_\beta)\times\{y\}\in V_\beta$.

Наконец, семейство $\{V_\beta\}$ дизъюнктно. В самом деле, пусть $C\in V_\beta$. Существует точка $(x,y)\in C\cap(U_\beta\times A)$. Тогда $x\notin U_\gamma$ при $\beta\neq\gamma$, $y\notin B$, откуда следует, что $(x,y)\notin U_\gamma\times A\cup(D^{\omega_1}\setminus U_\gamma)\times B$ и, значит, $C\notin V_\gamma$. Итак, множество $(\exp\pi)^{-1}F$ не удовлетворяет условию Суслина, и поэтому отображения π и $\exp\pi$ не гомеоморфны. Предложение доказано.

2.5. Предложение. *Бикомпакты D^τ и $\exp_n(D^\tau)$ не гомеоморфны при $n\geqslant 3$ ни для какого несчетного τ.*

Доказательство. Рассмотрим только наиболее сложный случай $\tau=\omega_1$. Предположим, что D^τ гомеоморфно $\exp_n(D^\tau)$. Из спектральной теоремы о гомеоморфизме (III.3.12) получим, что отображения $\pi\colon D^\omega\times D^\omega\to D^\omega$ и $\exp_n\pi$ гомеоморфны. Но легко проверить, что отображение $\exp_n\pi$ при $n\geqslant 3$ не открыто. Это противоречие и доказывает предложение.

Наиболее сложен случай $n=2$. Докажем сначала

2.6. Предложение. *Не существует селекции к отображению $\pi^2\colon D^{\omega_1}\times D^{\omega_1}\to\exp_2(D^{\omega_1})$.*

Доказательство. Предположим, что селекция $s\colon \exp_2(D^{\omega_1})\to D^{\omega_1}\times D^{\omega_1}$ существует. Тогда $s\{x_1,x_2\}$ равно либо (x_1,x_2), либо (x_2,x_1). Для $x\in D^{\omega_1}$ определим отображение $s_x\colon D^{\omega_1}\setminus\{x\}\to D$ следующей формулой:

$$s_x(y)=\begin{cases}0, \text{ если } s\{x,y\}=(x,y),\\ 1, \text{ если } s\{x,y\}=(y,x).\end{cases}$$

Функция s_x непрерывна. В самом деле, предположим, что $s_x(y)=0$. Тогда $s\{x,y\}=(x,y)$. Возьмем непересекающиеся окрестности Ox и Oy. В силу непрерывности s существует такое открытое множество $O=O\langle U_1,\dots,U_m\rangle\subset\exp_2(D^{\omega_1})$, что $\{x,y\}\in$

$\in O \subset s^{-1}(Ox \times Oy)$. Для всякой точки вида $\{x, y'\} \in O$ имеем $s\{x, y'\} = (x, y')$, т. е. $s_x(y') = 0$. Положим $U = \cap\{U_i\colon y \in U_i\}$. Тогда для $y' \in U$ имеем $\{x, y'\} \in O$, т. е. $s_x(y') = 0$.

Согласно II.6.43 функцию s_x можно продолжить до непрерывной на всем D^{ω_1}. Это продолжение также обозначим s_x. В силу II.6.28 функция s_x зависит от счетного множества $A \subset \omega_1$ координат.

Выберем в D^{ω_1} три различные точки x, y, z так, что $p_A(x) = p_A(y) = p_A(z)$(это можно сделать, поскольку $|A| < \omega_1$). Из трех чисел $s_x(x)$, $s_y(y)$, $s_z(z)$, которые могут принимать лишь два значения 0 и 1, по крайней мере два совпадают. Пусть $s_x(x) = s_y(y)$. Из $p_A(x) = p_A(y)$ вытекает $s_x(y) = s_x(x) = s_y(y) = s_y(x)$. Это противоречит неравенству $s_x(y) \neq s_y(x)$. Предложение доказано.

2.7. Предложение (Е. В. Щепин). *Бикомпакты D^{ω_2} и $\exp_2(D^{\omega_2})$ не гомеоморфны.*

Доказательство. Предположим, что $\exp_2(D^{\omega_2})$ гомеоморфно D^{ω_2}. Снова, применяя спектральную теорему, получаем, что проектирование $\pi\colon D^{\omega_1} \times D^{\omega_1} \to D^{\omega_1}$ на первый сомножитель гомеоморфно $\exp_2 \pi$. Тогда существует такая селекция $\sigma\colon \exp_2(D^{\omega_1}) \to \exp_2(D^{\omega_1} \times D^{\omega_1})$ к отображению $\exp_2 \pi$, что $\sigma(x) = p = \{(x, y), (x, z)\}$, где $y \neq z$. Возьмем непересекающиеся окрестности Oy и Oz. Положим $U = O\langle D^{\omega_1} \times Oy, D^{\omega_1} \times Oz\rangle$. Тогда $p \in U$. В силу непрерывности σ существует такая окрестность V точки x, что $\sigma O(V) \subset U$. Считаем, что V гомеоморфно D^{ω_1}. Теперь устроим селекцию $s\colon \exp_2(D^{\omega_1}) \to D^{\omega_1} \times D^{\omega_1}$ к отображению $\pi^2\colon D^{\omega_1} \times D^{\omega_1} \to \exp_2(D^{\omega_1})$, что противоречит предложению 2.6.

Для $\{x', y'\} \in \exp_2 V$ имеем $\sigma\{x', y'\} = \{(x', t_1), (y', t_2)\}$. Тогда либо $t_1 \in Oy$, $t_2 \in Oz$, либо наоборот. Положим

$$s\{x', y'\} = \begin{cases} (x', y'), \text{ если } t_1 \in Oy, \\ (y', x'), \text{ если } t_1 \in Oz. \end{cases}$$

Тогда $\pi^2 \circ s$ — тождественное отображение пространства $\exp_2 V = \exp_2(D^{\omega_1})$ на себя, т. е. s есть селекция к отображению π^2. Проверим, что отображение s непрерывно. Если $x' = y'$, то для $Ox' \times Ox' \ni (x', x')$ положим $O = O\{x', x'\} = O\langle Ox'\rangle$. Тогда, очевидно, $s(O) = Ox' \times Ox'$. Пусть теперь $x' \neq$

$\neq y'$ и, например, $s\{x', y'\} = (y', x')$. Возьмем непересекающиеся окрестности Ox' и Oy'. Множество $U_0 = O\langle Ox' \times Oz, Oy' \times Oy\rangle$ — окрестность точки $\sigma\{x', y'\} = \{(x', t_1), (y', t_2)\}$. В силу непрерывности отображения σ существуют такие открытые множества $W_1 \ni x'$ и $W_2 \ni y'$, что $\sigma(O\langle W_1, W_2\rangle) \subset \subset U_0$. Положим $W_1' = W_1 \cap Ox'$ и $W_2' = W_2 \cap Oy'$ и возьмем $\{x'', y''\} \in O = O\langle W_1', W_2'\rangle$. Если $x'' \in W_1'$, $y'' \in W_2'$ и $\sigma\{x'', y''\} = \{(x'', t_1), (y'', t_2)\}$, то $t_1 \in Oz$ и, значит, $s\{x'', y''\} = (y'', x'') \in \in Oy' \times Ox'$. Если же $x'' \in W_2'$, $y'' \in W_1'$, то $t_1 \in Oy$ и, значит, $s\{x'', y''\} = (x'', y'') \in Oy' \times Ox'$. Итак, для окрестности $Oy' \times Ox'$ точки $s\{x', y'\}$ найдена такая окрестность O точки $\{x', y'\}$, что $s(O) \subset Oy' \times Ox'$. Аналогично разбирается случай $s\{x', y'\} = (x', y')$. Предложение доказано.

Из предложений 2.4, 2.5 и 2.7 вытекает

2.8. Теорема. *Никакая экспонента дисконтинуума D^{ω_2} не совпадает с D^{ω_2}.*

§ 3. Пространство мер. Функторы вероятностных мер

3.1. Меры. Пусть X — бикомпакт. Непрерывный функционал $\mu\colon CX \to \mathbb{R}$ (см. гл. VIII, § 1) назовем *мерой* на X. Обоснованием к названию является теорема Рисса об изоморфизме между нормированным пространством $(C(X))^*$, сопряженным к $C(X)$ (пространством непрерывных функционалов на $C(X)$), и пространством $M(X)$ конечных регулярных мер на X. Теорема Рисса нам не потребуется. Поэтому не даем никаких определений из теории меры и понимаем под мерой всякий непрерывный функционал μ на $C(X)$. Иногда употребляем символ $\int \varphi d\mu$, не понимая под этим ничего, кроме значения функционала μ на φ. Желающие, впрочем, могут понимать это и как результат интегрирования функции φ по мере μ (счетно-аддитивной конечной регулярной функции борелевских множеств). Итак, используем обозначение $M(X)$ для пространства $(C(X))^*$.

3.2. Мера $\mu \in M(X)$ называется *положительной* (символически $\mu \geqslant 0$), если $\mu(\varphi) \geqslant 0$ для всякого $\varphi \geqslant 0$. Множество положительных мер называется *положительным конусом* пространства $M(X)$.

Мера μ положительна тогда и только тогда, когда $\|\mu\| = \mu(1_X)$.

В самом деле, пусть $\mu \geqslant 0$ и $|\varphi| \leqslant 1$. Тогда $\mu(1_X - \varphi) \geqslant 0$. Следовательно, $\mu(1_X) \geqslant \mu(\varphi)$, откуда $\mu(1_X) = \|\mu\|$. Наоборот, пусть теперь $\mu(1_X) = \|\mu\|$ и $\varphi \geqslant 0$. Положим $\psi = 1_X - (\varphi/\|\varphi\|)$. Поскольку $\|\psi\| \leqslant 1$, имеем $\mu(\psi) \leqslant \|\mu\| = \mu(1_X)$, т.е. $\mu(1_X) - \mu(\varphi/\|\varphi\|) \leqslant \mu(1_X)$. Следовательно, $\mu(\varphi) \geqslant 0$.

3.3. Мера μ называется ***нормированной***, если $\|\mu\| = 1$. Положительная нормированная мера называется ***вероятностной***.

Из 3.2 вытекает, что положительная мера μ является вероятностной тогда и только тогда, когда $\int 1_X d\mu = 1$.

3.4. Пространство мер в слабой топологии. Наделим множество $M(X)$ слабой топологией, т.е. считаем $M(X)$ подмножеством произведения числовых прямых $\prod\{\mathbb{R}_\varphi \colon \varphi \in C(X)\}$. Базу окрестностей элемента $\mu \in M(X)$ образуют множества $O(\mu, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \varepsilon)$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C(X)$, $\varepsilon > 0$ и $O(\mu, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \varepsilon) = \{\mu' \in M(X) \colon |\mu'(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, k\}$. Итак, $M(X)$ — вполне регулярное пространство. Подпространство $M(X)$, состоящее из всех вероятностных мер, обозначим $P(X)$.

3.5. Предложение. *$P(X)$ — бикомпакт.*

Доказательство. Заметим сначала, что $P(X)$ замкнуто в $\prod\{\mathbb{R}_\Phi \colon \varphi \in C(X)\}$. В самом деле, если $\mu \in [P(X)]$, то функция μ линейна:

$$\begin{gathered}
\text{если } \varphi, \psi \in C(X), \varepsilon > 0, \text{то возьмем } \mu_1 \in P(X) \text{ так, что} \\
\mu_1 \in O(\mu, \varphi, \psi, \varphi + \psi, \varepsilon/3). \text{ Тогда } |\mu(\varphi + \psi) - \mu(\varphi) - \mu(\psi)| = \\
= |\mu(\varphi + \psi) - \mu_1(\varphi + \psi) + \mu_1(\varphi) + \mu_1(\psi) - \mu(\varphi) - \mu(\psi)| \leqslant \\
\leqslant |\mu(\varphi + \psi) - \mu_1(\varphi + \psi)| + |\mu_1(\varphi) - \mu(\varphi)| + |\mu_1(\psi) - \mu(\psi)| < \varepsilon, \\
\text{т. е. } \mu(\varphi + \psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi). \text{ Аналогично } \mu(r\varphi) = r\mu(\varphi).
\end{gathered}$$

Далее, $\|\mu\| = 1$:

если $\|\varphi\| \leqslant 1$ и $\varepsilon > 0$, то существует такое $\mu_1 \in P(X)$, что $|\mu_1(\varphi) - \mu(\varphi)| < \varepsilon$. Тогда $|\mu(\varphi)| \leqslant |\mu_1(\varphi)| + \varepsilon$, т.е. $|\mu(\varphi)| \leqslant 1 + \varepsilon$ и, значит, $|\mu(\varphi)| \leqslant 1$. Аналогично, $\mu(1_X) = 1$. Таким образом, $\mu \in P(X)$ согласно 3.3.

С другой стороны, $P(X)$ лежит в произведении отрезков $\prod\{[-\|\varphi\|; \|\varphi\|] \colon \varphi \in C(X)\}$. Значит, $P(X)$ — бикомпакт. Предложение доказано.

3.6. Говорят, что мера μ ***сосредоточена на множестве*** $F \subset \subset X$, если $\int \varphi d\mu = 0$ для любой $\varphi \in C(X)$, обращающейся в нуль на F.

Наименьшее замкнутое множество, на котором сосредоточена мера μ, называется ***ее носителем*** и обозначается $\operatorname{supp} \mu$.

3.7. Лемма. *Для всякой точки $x \in X$ существует единственная вероятностная мера δ_x, сосредоточенная в x.*

Доказательство. Пусть δ_x — такая мера. Тогда $\delta_x(1_X) = = 1$ и, значит, $\delta_x(\varphi) = \delta_x(\varphi(x) \cdot 1_X) = \varphi(x)$. Ясно, с другой стороны, что мера δ_x, определяемая равенством $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, вероятностна и сосредоточена в точке x.

Мера δ_x называется *мерой Дирака, сосредоточенной в точке x*.

3.8. Предложение. *Отображение $\delta \colon X \to P(X)$, переводящее точку x в меру δ_x, непрерывно и, значит, является гомеоморфизмом.*

Доказательство. В произвольной окрестности $O\delta_x$ меры δ_x содержится базисная окрестность $O(\delta_x, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \varepsilon)$. Существует такая окрестность Ox, что $|\varphi_i(y) - \varphi_i(x)| < \varepsilon$ для всех $y \in Ox$ и $i = 1, \ldots, k$. Тогда $\delta(Ox) \subset O(\delta_x, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \varepsilon)$. Предложение доказано.

3.9. Предложение. *Для бесконечного бикомпакта X имеем $wX = wP(X)$.*

Доказательство. Согласно 3.8 бикомпакт X вкладывается в $P(X)$. Следовательно, $wX \leqslant wP(X)$. С другой стороны, ясно, что функции φ_i в определении топологии на $M(X)$(см. 3.4) можно брать из плотного в $C(X)$ множества, а ε предполагать рациональным. Но из II.3.12 вытекает, что $dC(X) \leqslant wX$ для бесконечного X. Это и завершает доказательство предложения 3.9.

3.10. Функтор P. Пусть $f \colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Определим отображение $P(f) \colon P(X) \to P(Y)$, полагая

$$(P(f)(\mu))(\varphi) = \mu(\varphi \circ f). \tag{1}$$

Отображение $P(f)$ непрерывно. В самом деле, пусть $\mu \in P(X)$ и $\nu = P(f)(\mu)$. Возьмем базисную окрестность $V = O(v, \varphi_1, \ldots \ldots, \varphi_k, \varepsilon)$ меры ν, положим $U = O(\mu, \varphi_1 \circ f, \ldots, \varphi_k \circ f, \varepsilon)$ и покажем, что $P(f)(U) \subset V$. Если $\mu' \in U$, то $|\mu'(\varphi_i \circ f) - \mu(\varphi_i \circ f)| < \varepsilon$. Но согласно (1) это равносильно неравенству $|(P(f)(\mu'))(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon$, откуда получаем, что $P(f)(\mu') \in V$.

Непосредственная проверка показывает, что $P(g \circ f) = P(g) \circ P(f)$. Таким образом, P — ковариантный функтор, действующий в категории Comp.

3.11. Предложение. *Функтор P непрерывен.*

Доказательство. Пусть $X = \lim S$, где $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \mathfrak{A}\}$ — обратный спектр из бикомпактов. Пространство $P(X)$ отображается в предел спектра $P(S)$ посредством предела π отображений $P(\pi_\alpha)$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, где $\pi_\alpha \colon X \to X_\alpha$ — сквозная проекция. Надо показать, что π — гомеоморфизм.

Проверим сначала, что отображение π взаимно однозначно. Пусть $\mu_1, \mu_2 \in P(X)$ — две различные меры. Тогда существует такая функция $\varphi \in C(X)$, что $|\mu_1(\varphi) - \mu_2(\varphi)| = a > 0$. По теореме Вейерштрасса–Стоуна множество функций вида $\psi \circ \pi_\alpha$, где $\varphi \in C(X_\alpha)$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, всюду плотно в $C(x)$. Поэтому существует такое $\alpha \in \mathfrak{A}$ и такая функция $\psi \in C(X_\alpha)$, что $|\varphi - \psi \circ \pi_\alpha| < a/3$. Поскольку $\|\mu_i\| = 1$, имеем, $|\mu_i(\varphi - \psi \circ \pi_\alpha)| < a/3$. Тогда $a = |\mu_1(\varphi) - \mu_2(\varphi)| = |\mu_1(\varphi) - \mu_1(\psi \circ \pi_\alpha) + \mu_1(\psi \circ \pi_\alpha) - \mu_2(\psi \circ \pi_\alpha) + \mu_2(\psi \circ \pi_\alpha) - \mu_2(\varphi)| \leqslant |\mu_1(\varphi) - \mu_2(\psi \circ \pi_\alpha)| + |\mu_1(\psi \circ \pi_\alpha) - \mu_2(\psi \circ \pi_\alpha)| + |\mu_2(\psi \circ \pi_\alpha) - \mu_2(\varphi)| < 2/3a + |\mu_1(\psi \circ \pi_\alpha) - \mu_2(\psi \circ \pi_\alpha)|$. Значит, $\mu_1(\psi \circ \pi_\alpha) \neq \mu_2(\psi \circ \pi_\alpha)$. Но согласно (1) имеем $\mu_i(\psi \circ \pi_\alpha) = (P(\pi_\alpha)(\mu_i))(\psi)$. Таким образом, отображение $P(\pi_\alpha)$ переводит μ_1 и μ_2 в различные меры. Тем более это верно для отображения π.

Теперь покажем, что π — эпиморфизм. Пусть $\mu \in \lim P(S)$. Это означает, что для произвольного $\alpha \in \mathfrak{A}$ существует такая мера $\mu_\alpha = p_\alpha(\mu) \in P(X_\alpha)$, что при $\beta < \alpha$ имеем

$$\mu_\beta = P(\pi^\alpha_\beta)(\mu_\alpha), \tag{2}$$

где $p_\gamma \colon \lim P(S) \to P(X_\gamma)$ — сквозная проекция спектра $P(S)$. Равенство

$$\nu_\alpha(\psi \circ \pi_\alpha) = \mu_\alpha(\psi) \tag{3}$$

определяет линейный функционал ν_α на подпространстве $C_\alpha \subset \subset C(X)$, состоящем из всех функций вида $\psi \circ \pi_\alpha$. При этом для $\beta < \alpha$ имеем $C_\alpha \supset C_\beta$ и, кроме того, $\nu_\alpha | C_\beta = \nu_\beta$ согласно (2). Таким образом, определен линейный функционал ν на пространстве $C = \cup\{C_\alpha \colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$. Ясно, что $\|\nu\| = 1$ и ν — неотрицательный функционал. По теореме Хана–Банаха (см. гл. VIII, § 1) существует продолжение $\overline{\nu}$ функционала ν на все $C(X)$. Поскольку C по теореме Вейерштрасса–Стоуна всюду плотно в $C(X)$, это продолжение единственно и является вероятностной мерой, поскольку $\overline{\nu} \geqslant 0$ и $\|\overline{\nu}\| = 1$. Из (2) и (3) вытекает, что $P(\pi_\alpha)(\overline{\nu}) = \mu_\alpha$, откуда $\pi(\overline{\nu}) = \mu$. Предложение доказано.

3.12. Предложение. *Если $f \colon X \to Y$ — мономорфизм, то $P(f)$ — также мономорфизм.*

Доказательство. Если $\mu_1, \mu_2 \in P(X)$ — две различные меры, то существует такая функция $\varphi \in C(X)$, что $\mu_1(\varphi) \neq \neq \mu_2(\varphi)$. По теореме Брауэра–Титце–Урысона существует такая функция $\psi \in C(Y)$, что $\varphi = \psi \circ f$. Тогда согласно (1) имеем $(P(f)(\mu_i))(\psi) = \mu_i(\psi \circ f) = \mu_i(\varphi)$, откуда $P(f)(\mu_1) \neq P(f)(\mu_2)$. Предложение доказано.

3.13. Мерой с конечным носителем назовем меру, носитель которой состоит из конечного числа точек. Пусть носитель меры $\mu \in P(X)$ состоит из n различных точек $x_1, \ldots, x_n$. Возьмем функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C(X)$, подчиненные условию

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j; \\ 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases} \tag{4}$$

Положим $m_i = \mu(\varphi_i)$. По определению носителя меры числа m_i не зависят от выбора функций φ_i, удовлетворяющих условию (4), и, следовательно, однозначно определяются мерой μ. Назовем число m_i *μ-мерой* точки x_i.

Функции φ_i, удовлетворяющие условию (4), можно выбрать так, что $\sum \varphi_i = 1_X$ и $\varphi_i \geqslant 0$. Поэтому

$$m_1 + \ldots + m_n = 1 \text{ и } m_i \geqslant 0. \tag{5}$$

Имеют место и строгие неравенства

$$m_i > 0 \text{ для всех } i = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

В самом деле, предположим, что $m_i = 0$ для некоторого i. Положим $A = \operatorname{supp}\mu \setminus \{x_i\}$ и возьмем произвольно функцию φ, равную нулю на A. Если $\varphi(x_i) = 0$, то $\mu(\varphi) = 0$ по определению носителя меры. Если же $\varphi(x_i) = a \neq 0$, то положим $\varphi_i = \varphi/a$. Функция φ_i удовлетворяет условию (4). Значит, $\mu(\varphi_i) = m_i = 0$. Но тогда и $\mu(\varphi) = a\mu(\varphi_i) = 0$. Следовательно, мера μ сосредоточена на множестве A. Но это противоречит тому, что $x_i \in \operatorname{supp}\mu$.

Теперь покажем, что мера μ с конечным носителем $\{x_1, \ldots \ldots, x_n\}$ однозначно определяется μ-мерами m_i точек x_i из носителя.

А именно:

$$\mu(\varphi) = m_1\varphi(x_1) + \ldots + m_n\varphi(x_n) \tag{7}$$

или с учетом определения меры Дирака δ_x (см. 3.7)

$$\mu = m_1\delta_{x_1} + \ldots + m_n\delta_{x_n}. \tag{8}$$

В самом деле, произвольную функцию φ можно представить в виде

$$\varphi = \varphi(x_1)\varphi_1 + \ldots + \varphi(x_n)\varphi_n,$$

где функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ удовлетворяют условию (4). Тогда

$$\mu(\varphi) = \varphi(x_1)\mu(\varphi_1) + \ldots + \varphi(x_n)\mu(\varphi_n) = \\ = \varphi(x_1)m_1 + \ldots + \varphi(x_n)m_n.$$

Таким образом, доказано

3.14. Предложение. *Меры с конечными носителями — это в точности выпуклые линейные комбинации* (8) *мер Дирака.*

3.15. В этом пункте все функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ предполагаются непрерывными. Положим

$$\operatorname{supp}\varphi = [\{x \in X\colon \varphi(x) \neq 0\}].$$

Пусть $\mu \in P(X)$. Тогда следующие свойства непосредственно вытекают из определений.

1°. Если $\varphi \geqslant 0$, то $\mu(\varphi) \geqslant 0$.

2°. Если $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$, то $\mu(\varphi_1) \leqslant \mu(\varphi_2)$.

3°. $\mu(\max\{|\varphi_1|, |\varphi_2|\}) \leqslant \mu(|\varphi_1|) + \mu(|\varphi_2|)$.

4°. Если $\operatorname{supp}\varphi_1 \cap \operatorname{supp}\varphi_2 = \varnothing$, то $\mu(\max\{|\varphi_1|, |\varphi_2|\}) = \mu(|\varphi_1|) + \mu(|\varphi_2|)$.

5°. Если $\mu(|\varphi|) = 0$, то $\mu(\varphi) = 0$.

3.16. Квазихарактеристические функции. Пусть $\mu \in P(X)$ и $F \subset X$ — замкнутое множество. Функцию $\varphi \in C(X)$ назовем квазихарактеристической функцией множества F, если $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ и $\varphi(F) = 1$.

Множество всех квазихарактеристических функций множества F обозначим $\mathrm{X}(F)$. Множества $\mathrm{X}(F)$ обладают следующими свойствами:

1°. Если $F_1 \subset F_2$, то $\mathrm{X}(F_1) \supset \mathrm{X}(F_2)$;

2°. $\mathrm{X}(F_1 \cup F_2) = \mathrm{X}(F_1) \bigvee \mathrm{X}(F_2)$, где для $C_1, C_2 \subset C(X)$ через $C_1 \bigvee C_2$ обозначается множество $\{\max\{\varphi_1, \varphi_2\} : \varphi_1 \in C_1, \varphi_2 \in C_2\}$.

3.17. Меры замкнутых множеств. Пусть $\mu \in P(X)$ и $F \subset X$ — замкнутое множество. Положим

$$\mu(F) = \inf\{\mu(\varphi) : \varphi \in \mathrm{X}(F)\}. \qquad (9)$$

Назовем так определенное число μ-мерой множества F. Приведем некоторые свойства меры замкнутых множеств.

1°. $0 \leqslant \mu(F) \leqslant 1$.

2°. Монотонность. Если $F_1 \subset F_2$, то $\mu(F_1) \leqslant \mu(F_2)$. Вытекает из 3.16.1°.

3°. $\mu(F_1 \cup F_2) \leqslant \mu(F_1) + \mu(F_2)$. Вытекает из 3.15.3 ° и 3.16.2°.

4°. Аддитивность. Если $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то $\mu(F_1 \cup F_2) = \mu(F_1) + \mu(F_2)$.

Согласно 3° достаточно проверить неравенство $\geqslant$. Пусть $\varphi \in \mathrm{X}(F_1 \cup F_2)$. Тогда существуют такие функции $\varphi_i \in \mathrm{X}(F_i)$, что $\varphi_1 + \varphi_2 \leqslant \varphi$. В самом деле, возьмем непересекающиеся окрестности OF_1 и OF_2 и такие функции ψ_i, что $0 \leqslant \psi_i \leqslant 1$, $\psi_i(F_i) = 1$ и $\psi_i(X \setminus OF_i) = 0$. Положив $\varphi_i = \min\{\varphi, \psi_i\}$, получим требуемые функции. Тогда

$$\begin{aligned}\mu(F_1 \cup F_2) &= \inf\{\mu(\varphi) : \varphi \in \mathrm{X}(F_1 \cup F_2)\} \geqslant \\ &\geqslant \inf\{\mu(\varphi_1 + \varphi_2) : \varphi_i \in \mathrm{X}(F_i), \operatorname{supp}\varphi_1 \cap \operatorname{supp}\varphi_2 = \varnothing\} \geqslant \\ &\geqslant \inf\{\mu(\varphi_1) : \varphi_1 \in \mathrm{X}(F_1)\} + \inf\{\mu(\varphi_2) : \varphi_2 \in \mathrm{X}(F_2)\}.\end{aligned}$$

5°. $\mu(F) = \inf\{\mu(\varphi)\colon \varphi \in r\mathrm{X}(F)\}$, где $r\mathrm{X}(F) = \{\varphi \in \mathrm{X}(F)\colon \varphi^{-1}(1)$ — окрестность множества $F\}$.

Чтобы доказать это, достаточно для каждой функции $\varphi \in \mathrm{X}(F)$ и любого $\varepsilon > 0$ найти функцию $\psi \in r\mathrm{X}(F)$, для которой $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$. Множество $O^\varepsilon F = \{x\colon \varphi(x) > 1 - \varepsilon\}$ — окрестность множества F. Функция $1 - \varphi$ на множестве $F_1 = [O^\varepsilon F]$ заключена в пределах от 0 до ε. По теореме Брауэра–Титце–Урысона ее можно продолжить до такой функции $\psi_1 \in C(X)$, что $0 \leqslant \psi_1 \leqslant \varepsilon$. Теперь остается положить $\psi = \varphi + \psi_1$.

6°. Регулярность. Для всякой окрестности OF и любого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество F_1, что $F \cap F_1 = \varnothing$, $F_1 \cup OF = X$ и $1 - \mu(F \cup F_1) < \varepsilon$.

Согласно 5° существует такая функция $\varphi \in r\mathrm{X}(F)$, что $\mu(\varphi) - \mu(F) < \varepsilon$. При этом можно предположить, что $\operatorname{supp}\varphi \subset OF$. Положим $F_0 = \varphi^{-1}(1)$ и $F_1 = [X \setminus F_0]$. Тогда $\varphi \in \mathrm{X}(F_0)$. Поэтому $\mu(F_0) \leqslant \mu(\varphi) < \mu(F) + \varepsilon$. Поскольку $X = F_0 \cup F_1$, имеем

$$1 = \mu(F_0 \cup F_1) \leqslant \mu(F_0) + \mu(F_1) < \mu(F) + \varepsilon + \mu(F_1).$$

Поэтому $1 - \mu(F) - \mu(F_1) < \varepsilon$. Остается заметить, что согласно 4° имеем $\mu(F) + \mu(F_1) = \mu(F \cup F_1)$.

7°. Для любого конечного открытого покрытия $\{U_1, \ldots, U_n\}$ бикомпакта X и любого $\varepsilon > 0$ существует такая дизъюнктная система замкнутых множеств $F_i \subset U_i$, $i = 1, \ldots, n$, что

$$\mu(F_1) + \ldots + \mu(F_n) > 1 - \varepsilon.$$

Индукция по n с применением 6°.

8°. Если $\varphi \leqslant 1$, то $\mu(\operatorname{supp}\varphi) \geqslant \mu(\varphi)$.

Вытекает из того, что $\varphi \leqslant \psi$ для всякой функции $\psi \in \mathrm{X}(\operatorname{supp}\varphi)$.

3.18. Интегрирование ступенчатых функций. Пусть в пространстве X дана дизъюнктная система замкнутых множеств $F_1, \ldots, F_n$, и пусть даны вещественные числа $a_1, \ldots, a_n, b$. *Ступенчатой функцией*, определенной множествами $F_1, \ldots, F_n$ и числами $a_1, \ldots, a_n, b$, называется кусочно-постоянная функция $\chi^{a_1,\ldots,a_n,b}_{F_1,\ldots,F_n}$, равная a_i на F_i и b на $X \setminus F_1 \cup \ldots \cup F_n$.

Назовем ступенчатую функцию $\chi_{F_1,\dots,F_n}^{a_1,\dots,a_n,b}$ *функцией положительного рода*, если $a_i \geqslant b$, и *отрицательного рода*, если $a_i \leqslant \leqslant b$.

Интегралом ступенчатой функции $\chi = \chi_{F_1,\dots,F_n}^{a_1,\dots,a_n,b}$ по мере μ назовем число

$$\int \chi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(F_i) + b\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i)\right). \tag{10}$$

Назовем две ступенчатые функции $\chi = \chi_{F_1,\dots,F_n}^{a_1,\dots,a_n,b}$ и $\chi' = = \chi_{F'_1,\dots,F'_n}^{a'_1,\dots,a'_n,b'}$ *независимыми*, если $F_i \cap F'_j = \varnothing$. Ясно, что сумма независимых ступенчатых функций χ и χ' — ступенчатая функция вида

$$\chi_{F_1,\dots,F_n,F'_1,\dots,F'_n}^{a_1+b',\dots,a_n+b',a'_1+b,\dots,a'_n+b,b+b'}$$

и

$$\int (\chi + \chi') d\mu = \int \chi d\mu + \int \chi' d\mu. \tag{11}$$

3.19. Предложение. *Пусть $\varphi \in C(X)$ и $\chi_1 \leqslant \varphi \leqslant \chi_2$, где χ_1, χ_2 — ступенчатые функции соответственно положительного и отрицательного рода. Тогда*

$$\int \chi_1 d\mu \leqslant \mu(\varphi) \leqslant \int \chi_2 d\mu. \tag{12}$$

Доказательство. Поскольку умножение на -1 переводит ступенчатые функции положительного рода в ступенчатые функции отрицательного рода и наоборот, достаточно доказать одно из неравенств (12), например левое. Далее, прибавляя к обеим частям неравенства постоянную функцию, считаем, что $\chi_1 = = \chi_{F_1,\dots,F_n}^{a_1,\dots,a_n,0}$. Функцию χ_1 можно представить в виде суммы

$$\chi_1 = \chi_{F_1}^{a_1,0} + \ldots + \chi_{F_n}^{a_n,0}.$$

Функцию φ также можно представить в виде суммы $\varphi = = \varphi_1 + \ldots + \varphi_n$, где $\varphi_i \geqslant \chi_{F_i}^{a_i,0}$. Поэтому с учетом равенства (11) достаточно доказать неравенство (12) для «одноступенчатой» функции $\chi_1 = \chi_F^{a,0}$. Умножая обе части неравенства на $1/a$ (если $a = 0$, то χ_1 непрерывна), считаем, что χ_1 — характеристическая функция множества F. Тогда $\int \chi_1 d\mu = \mu(F) \leqslant \mu(\psi)$ для любой функции $\psi \in \mathrm{X}(F)$, в частности для $\psi = \min\{\varphi, 1_X\}$. Предложение доказано.

3.20. Предложение. *Меры с конечными носителями образуют плотное в $P(X)$ множество.*

Доказательство. Возьмем базисную окрестность $O(\mu, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \varepsilon)$ произвольной меры $\mu \in P(X)$. Существует конечное открытое покрытие $\{U_1, \dots, U_n\}$ бикомпакта X, колебание всякой функции φ_i на каждом элементе, которого меньше $\varepsilon/3$. Возьмем число M так, что $M \geqslant |\varphi_i(x)|$ для всех $x \in X$ и $i = 1, \dots, k$. Согласно 3.17.7° существуют такие попарно непересекающиеся замкнутые множества $F_j \subset U_j$, что

$$1 - \mu(F_1) - \dots - \mu(F_n) < \frac{\varepsilon}{3}M. \tag{13}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\mu(F_j) > 0$ для всех $j = 1, \dots, n$. Существуют такие числа $m_1, \dots, m_n$, что $m_1 + \dots + m_n = 1$ и

$$\mu(F_j) \leqslant m_j < \mu(F_j) + \frac{\varepsilon}{3}Mn. \tag{14}$$

Возьмем произвольно по точке $x_j \in F_j$ и положим $\nu = \sum_{j=1}^{n} m_j \delta_{x_j}$. Покажем, что $\nu \in O(\mu, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \varepsilon)$. Положим

$$a_{ij}^{+} = \sup(\varphi_i|F_j), \quad a_{ij}^{-} = \inf(\varphi_i|F_j). \tag{15}$$

Имеем

$$a_{ij}^{+} - a_{ij}^{-} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{16}$$

Определим ступенчатые функции χ_i^{+}, χ_i^{-}, $i = 1, \dots, k$, полагая

$$\chi_i^{+} = \chi_{F_1, \dots, F_n}^{a_{i1}^{+}, \dots, a_{in}^{+}, M}, \quad \chi_i^{-} = \chi_{F_1, \dots, F_n}^{a_{i1}^{-}, \dots, a_{in}^{-}, -M}.$$

Ясно, что χ_i^{-} — функции положительного рода, а χ_i^{+} — отрицательного. Проверим неравенства

$$-\varepsilon < \mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i) < \varepsilon, \ i = 1, \dots, k. \tag{17}$$

Проверим левые из них. Имеем

$$\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i) \geqslant \text{(согласно 3.19)} \geqslant \int \chi_i^{-} d\mu - \nu(\varphi_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}\mu(F_j) - M\left(1 - \sum_{j=1}^{n}\mu(F_j)\right) - \sum_{j=1}^{n} m_j\varphi_i(x_j) >$$

$$> (\text{согласно (13) и (15)}) > \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}\mu(F_j) - \frac{\varepsilon}{3} - \sum_{j=1}^{n} m_j a_{ij}^{+} >$$

$$> (\text{согласно 14}) > \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}\mu(F_j) - \frac{\varepsilon}{3} - \sum_{j=1}^{n}\left(\mu(F_j) + \frac{\varepsilon}{3Mn}\right) a_{ij}^{+} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^{-} - a_{ij}^{+})\mu(F_j) - \frac{\varepsilon}{3} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon}{3Mn}a_{ij}^{+} > (\text{согласно (16)}$$

$$\text{и неравенствам } a_{ij}^{+} \leqslant M) > -\frac{\varepsilon}{3}\sum_{j=1}^{n}\mu(F_j) - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} \geqslant -\varepsilon.$$

Правые неравенства (17) проверяются несколько проще. Предложение доказано.

3.21. Предложение. *Если $f\colon X \to Y$ — эпиморфизм, то $P(f)$ — также эпиморфизм.*

Доказательство. Заметим сначала, что отображение $P(f)$ накрывает все меры $\mu \in P(Y)$ с конечными носителями, т. е. $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\delta_{y_i}$. В самом деле, взяв произвольно по точке $x_i \in f^{-1}y_i$ и положив $\nu = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\delta_{x_i}$, видим, что $P(f)(\nu) = \mu$. Применение предложения 3.20 завершает доказательство.

3.22. Предложение. *Точка $x \in X$ принадлежит носителю меры $\mu \in P(X)$ тогда и только тогда, когда для любой ее окрестности Ox имеем $\mu([Ox]) > 0$.*

Доказательство. Пусть существует такая окрестность Ox, что $\mu([Ox]) = 0$. Возьмем произвольно функцию $\varphi \in C(X)$ так, что $\varphi(X \setminus Ox) = 0$. Пусть $|\varphi| \leqslant M > 0$. По определению μ-меры замкнутого множества для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $\psi \in X([Ox])$, что $\mu(\psi) < \varepsilon/M$. Тогда $|\varphi| \leqslant M\psi$ и, значит, $\mu(|\varphi| \leqslant \mu(M\psi) < \varepsilon$. Итак, $\mu(|\varphi|) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $\mu(|\varphi|) = 0$. Тогда согласно 3.15.5° и $\mu(\varphi) = 0$. А отсюда по определению носителя меры вытекает, что $\operatorname{supp}\mu \subset \subset XOx$ и, значит, $x \notin \operatorname{supp}\mu$.

Наоборот, если $x \notin \operatorname{supp}\mu$, то, взяв окрестность Ox так, что $[Ox] \cap \operatorname{supp}\mu = \varnothing$, по лемме Урысона можно найти функцию $\psi \in X([Ox])$, равную нулю на $\operatorname{supp}\mu$. Тогда $\mu([Ox]) \leqslant \mu(\psi) = 0$. Предложение доказано.

Попутно доказано

3.23. Предложение. *Если $\mu(F) > 0$, то $F \cap \operatorname{supp}\mu \neq \varnothing$.*

3.24. Предложение. *Пусть $\mu(F) = m > 0$, $\psi \in \mathrm{X}(F)$ и $\varepsilon < m$. Тогда для любой меры $\nu \in O(\mu, \psi, \varepsilon)$ имеем $\nu(\operatorname{supp}\psi) > 0$.*

Доказательство. Имеем $\nu(\operatorname{supp}\psi) \geqslant \nu(\psi) > \mu(\psi) - \varepsilon \geqslant \mu(F) - \varepsilon > 0$.

3.25. Функтор P_n. Через $P_n(X)$ обозначим множество всех мер $\mu \in P(X)$, носители которых состоят не более чем из n точек. Множество $P_n(X)$ замкнуто в $P(X)$. В самом деле, пусть $\mu \in P(X) \setminus P_n(X)$. Возьмем $n+1$ различных точек $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \operatorname{supp}\mu$. Выберем окрестности Ox_i этих точек с попарно непересекающимися замыканиями. Существуют функции $\psi_i \in X([Ox_i])$, $i = 1, \ldots, n+1$, с попарно непересекающимися носителями. Согласно 3.22 $\mu([Ox_i]) = m_i > 0$. Пусть $\varepsilon < m_i$ для всех i. Тогда для любой меры $\nu \in O(\mu, \psi_1, \ldots, \psi_{n+1}, \varepsilon)$ согласно 3.24 имеем $\nu(\operatorname{supp}\psi_1) > 0$. Взяв по точке y_i из непустых согласно 3.23 множеств $\operatorname{supp}\psi_i \cap \operatorname{supp}\nu$, получим, что $|\operatorname{supp}\nu| \geqslant n+1$, т. е. $O(\mu, \psi_1, \ldots, \psi_{n+1}, \varepsilon) \cap P_n(X) = \varnothing$. Итак, $P_n(X)$ — бикомпакт.

Как отмечено в 3.14, точки пространства $P_n(X)$ — это выпуклые линейные комбинации $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \delta_{x_i}$, $k \leqslant n$, мер Дирака. Если $f\colon X \to Y$ — отображение, то $P(f)\left(\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \delta_{x_i}\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i \delta_{f(x_i)} \in P_n(Y)$. Значит, полагая $P_n(f) = P(f)|P_n(X)$, получаем отображение $P_n(f)\colon P_n(X) \to P_n(Y)$. Таким образом, мы определили функтор P_n, очевидно, являющийся подфунктором функтора P.

Как и функтор P, функтор P_n сохраняет вес бесконечных бикомпактов, переводит мономорфизмы в мономорфизмы, эпиморфизмы в эпиморфизмы. Функтор P_n также непрерывен (проверка этого факта проще, чем доказательство соответствующего утверждения 3.11 для P).

3.26. Рассмотрим значения функтора P на множестве n, состоящем из n различных точек $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Точки пространства $P(n) = P_n(n)$ естественно отождествляются с точками $(n-1)$-мерного симплекса T^{n-1}. При этом меры Дирака δ_i образуют вершины симплекса, а массы m_i, помещенные в точки i, являются барицентрическими координатами меры $\mu = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i\delta_i$. Топология на $P(n)$ также совпадает с топологией симплекса T^{n-1}. В самом деле, базисные окрестности $O(\mu, \chi_0, \dots, \chi_{n-1}, \varepsilon)$, где χ_i — характеристическая функция точки i, меры $\mu = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i\delta_i$ совпадают с ε-окрестностями точки $(m_0, m_1, \dots, m_{n-1}) \in T^{n-1}$ в метрике ρ, определенной следующим образом:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} |x_i - y_i|.$$

Поскольку $P(n)$ — бикомпакт, добавление других базисных окрестностей $O(\mu, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \varepsilon)$ не усиливает топологию, заданную окрестностями $O(\mu, \chi_0, \dots, \chi_{n-1}, \varepsilon)$. Итак, $P(n) = T^{n-1}$.

3.27. Всякий подфунктор $\mathscr{F}$ функтора P определяет множество $\mathscr{F}(n+1)$ симплекса T^n, которое назовем *n-мерным распределением функтора $\mathscr{F}$*.

Любому отображению $f\colon n+1 \to n+1$ соответствует, очевидно, симплициальное отображение $P(f)\colon P(n+1) \to P(n+1)$. При этом отображение $\mathscr{F}(f)$ — ограничение отображения $P(f)$ на множество $\mathscr{F}(n+1)$. Таким образом, n-мерное распределение всякого функтора $\mathscr{F} \subset P$ должно быть инвариантным относительно любого симплициального отображения φ симплекса $P(n+1)$ в себя — инвариантным в том смысле, что $\varphi(\mathscr{F}(n+1)) \subset \mathscr{F}(n+1)$.

3.28. Ф у н к т о р P^c. Пространство $P^c(X)$ состоит из всех мер $\mu \in P(X)$, носитель каждой из которых лежит в одной из компонент связности пространства X. Замкнутость множества $P^c(X)$ в бикомпакте $P(X)$ предоставляется проверить читателям. Включение $P(f)(P^c(X)) \subset P^c(Y)$ вытекает из 3.29.

3.29. Предложение. *Для любого отображения* $f \in C(X, Y)$ *и любой меры* $\mu \in P(X)$ *имеем*

$$\operatorname{supp} P(f)(\mu) = f(\operatorname{supp} \mu).$$

Доказательство. Проверим сначала включение $\subset$. Пусть функция $\varphi \in C(Y)$ равна нулю на $f(\operatorname{supp}\mu)$. Тогда $(\varphi \circ f)(\operatorname{supp}\mu) = 0$. Значит, $\mu(\varphi \circ f) = 0$. Но тогда $P(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f) = 0$.

Теперь противоположное включение. Пусть $y \in f(\operatorname{supp}\mu)$. Согласно 3.22 надо проверить, что $P(f)(\mu)([Oy]) > 0$ для всякой окрестности Oy. Возьмем такую точку $x \in \operatorname{supp}\mu$, что $f(x) = y$, и такую окрестность Ox, что $f(Ox) \subset Oy$. Тогда согласно 3.22 $\mu([Ox]) > 0$. Но для любого замкнутого $F \subset X$ имеем

$$\mu(F) \leqslant P(f)(\mu)(f(F)). \tag{18}$$

В самом деле, это неравенство вытекает из того, что $\varphi \in X(f(F))$ влечет $\varphi \circ f \in \mathrm{X}(F)$. Таким образом, $P(f)(\mu)([Oy]) \geqslant P(f)(\mu)(f[Ox]) \geqslant$ (согласно 18) $\geqslant \mu([Ox]) > 0$. Предложение доказано.

3.30. Замечание. Два разных подфунктора $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \subset P$ могут иметь одинаковые n-мерные распределения для всех n. В самом деле, пусть $\mathscr{F}_1 = \mathrm{Id}$ (вложение $\mathrm{Id} \to P$ определяется мерами Дирака), а $\mathscr{F}_2 = P^c$. Тогда $\mathrm{Id}(n) = n = P^c(n)$, но $\mathrm{Id} \neq P^c$, поскольку для отрезка I пространство $P^C(I) = P(I)$ содержит n-мерные симплексы для всякого n.

В то же время имеет место

3.31. Теорема. *Если подфунктор* $\mathscr{F} \subset P$ *непрерывен и переводит эпиморфизмы в эпиморфизмы, то он однозначно определяется своими конечномерными распределениями.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \subset P$ — два функтора, для которых $\mathscr{F}_1(n) = \mathscr{F}_2(n)$ при всех n. Из непрерывности функторов $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ и представимости нульмерных бикомпактов в виде пределов спектров из конечных пространств (см. III.2.11 и II.5.24) вытекает равенство $\mathscr{F}_1(X) = \mathscr{F}_2(X)$ для всех нульмерных X. Поскольку всякий бикомпакт X есть непрерывный образ нульмерного (II.6.6), а функторы $\mathscr{F}_i$ сохраняют эпиморфизмы, имеем $\mathscr{F}_1(X) = \mathscr{F}_2(X)$ для произвольного X. Но для совпадения функторов $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \subset P$ достаточно совпадения подпространств $\mathscr{F}_1(X), \mathscr{F}_2(X) \subset F(X)$ для всех X. Теорема доказана.

3.32. Следствие. *Если подфунктор $\mathscr{F} \subset P_n$ непрерывен и переводит эпиморфизмы в эпиморфизмы, то он однозначно определяется своим $(n-1)$-мерным распределением.*

Непосредственно вытекает из теоремы 3.31, поскольку для всякого конечного X имеем

$$\mathscr{F}(X) = \cup\{\mathscr{F}(Y) \colon Y \subset X, |Y| \leqslant n\}.$$

§ 4. Функтор суперрасширения

4.1. Покрытие пространства X, состоящее из двух элементов, называется *бинарным*. Пространство X называется *суперкомпактным*, если существует такая предбаза $\mathfrak{B}$ открытых множеств X, что из любого покрытия X элементами этой предбазы можно выбрать бинарное подпокрытие.

Из леммы Александера вытекает, что всякое суперкомпактное пространство бикомпактно.

4.2. Семейство $\mathscr{C}$ замкнутых подмножеств пространства X называется *замкнутой базой X* (или *базой замкнутых подмножеств X*), если всякое замкнутое подмножество пространства X является пересечением элементов семейства $\mathscr{C}$.

4.3. Семейство $\mathscr{C}$ замкнутых подмножеств пространства называется *его замкнутой предбазой*, если конечные объединения элементов семейства $\mathscr{C}$ образуют замкнутую базу пространства X.

Из этих определений и определений I.1.17, I.1.18 открытой базы и открытой предбазы непосредственно вытекает

4.4. Предложение. *Семейство $\mathscr{C}$ является замкнутой базой (предбазой) пространства X тогда и только тогда, когда семейство $\mathfrak{B} \in \{X \setminus A \colon A \in \mathscr{C}\}$ — его открытая база (предбаза).*

4.5. Система ξ замкнутых подмножеств пространства X называется *сцепленной*, если любые два элемента из ξ пересекаются.

Легко видеть, что с учетом предложения 4.4 следующее утверждение — переформулировка определения 4.1 суперкомпактности.

4.6. Предложение. *Пространство X суперкомпактно тогда и только тогда, когда в нем существует замкнутая предбаза, всякая сцепленная подсистема которой имеет непустое пересечение.*

4.7. По лемме Цорна всякая сцепленная система может быть дополнена до максимальной сцепленной системы (МСС), но такое дополнение, как правило, не однозначно.

4.8. Предложение. *Сцепленная система ξ пространства X является МСС тогда и только тогда, когда она обладает следующим свойством полноты:*

если замкнутое множество $A \subset X$ пересекается с каждым элементом из ξ, то $A \in \xi$.

В доказательстве нуждается только необходимость. Она вытекает из того, что если замкнутое множество A пересекается с каждым элементом сцепленной системы ξ, то система $\xi \cup \{A\}$ также сцеплена.

4.9. Предложение. *Пусть A— замкнутое подмножество пространства X. Тогда всякая МСС ξ пространства A содержится в единственной МСС ξ_X пространства X.*

Доказательство. Если $F \in \xi_X$, то F пересекается с каждым элементом из ξ. Но тогда и $F \cap A$ пересекается с каждым элементом из ξ. Согласно 4.8 имеем $F \cap A \in \xi$. Таким образом, семейство ξ_X определено однозначно:

$$\xi_X = \{F \subset X\colon F \text{ замкнуто и } F \cap A \in \xi\}. \tag{1}$$

4.10. Обозначим λX множество всех ММС пространства X. Для замкнутого множества $A \subset X$ положим

$$A^+ = \{\xi \in \lambda X\colon A \in \xi\}. \tag{2}$$

Для открытого множества $U \subset X$ положим

$$O(U) = \{\xi \in \lambda X\colon \text{ существует такое } F \in \xi, \text{ что} F \subset U\}. \tag{3}$$

4.11. Предложение. $\lambda X \setminus A^+ = O(X \setminus A)$.

Доказательство. Условие $\xi \notin A^+$ эквивалентно условию $A \notin \xi$, которое согласно 4.8 эквивалентно существованию такого $F \in \xi$, что $F \cap A = \varnothing$. Последнее в свою очередь эквивалентно тому, что $\xi \in O(X \setminus A)$. Предложение доказано.

4.12. Семейство множеств вида $O(U)$ покрывает множество $\lambda X(O(X) = \lambda X)$, поэтому согласно I.1.22 образует открытую предбазу топологии на λX. Множество λX, снабженное этой топологией, называется *суперрасширением* пространства X.

Согласно 4.4 и 4.11 замкнутую предбазу пространства λX образуют множества вида A^+.

4.13. Теорема. *Суперрасширение λX любого пространства X суперкомпактно.*

Доказательство. Достаточно проверить, что замкнутая предбаза λX, образованная множествами вида A^+, удовлетворяет условию предложения 4.6. Пусть система $\eta = \{A_\alpha^+ : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ сцеплена. Тогда система $\xi = \{A_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$ также сцеплена. Легко проверить, что любая МСС ξ', содержащая ξ, принадлежит $\bigcap\eta$. Теорема доказана.

4.14. Для произвольной точки $x \in X$ через $\eta(x)$ обозначим семейство всех замкнутых подмножеств пространства X, содержащих точку x. Система $\eta(x)$ — замкнутый ультрафильтр и тем более МСС. Таким образом, определено отображение $\eta\colon X \to \lambda X$, которое непрерывно в силу очевидного равенства

$$U = \eta^{-1} O(U) \tag{4}$$

для любого открытого множества $U \subset X$.

Из равенства (4) получаем, что $\eta(U) = O(U) \cap \eta(X)$. Следовательно, отображение $\eta\colon X \to \eta(X)$ открыто. Кроме того, для T_1-пространства X отображение $\eta\colon X \to \eta(X)$ взаимно однозначно. Итак, доказано

4.15. Предложение. *Для T_1-пространства X отображение η осуществляет вложение пространства X в его суперрасширение λX.*

Итак, для T_1-пространства X пространство λX — суперкомпактное пространство, в которое X естественно вкладывается. Этим и объясняется то, что λX называют *суперрасширением пространства* X. В дальнейшем часто отождествляем пространство X с подпространством $\eta(X)$ его суперрасширения.

4.16. Предложение. *Суперрасширение всякого T_4-пространства X хаусдорфово.*

Доказательство. Пусть ξ_1, ξ_2 — две различные МСС. Тогда одна из них, например, ξ_1, содержит множество F_1, не принадлежащее другой системе. Согласно предложению 4.8 существует множество $F_2 \in \xi_2$, не пересекающееся с F_1. Пусть U_1, U_2 — непересекающиеся окрестности множеств F_1 и F_2. Тогда согласно тому же предложению 4.8 множества $O(U_1), O(U_2)$ — непересекающиеся окрестности точек ξ_1 и ξ_2.

Из 4.13 и 4.16 вытекает

4.17. Предложение. *Суперрасширение любого бикомпакта — бикомпакт.*

4.18. Замечание. Суперрасширение λX практически никогда не является расширением пространства X. Так, если бикомпакт X содержит по крайней мере три точки, то он — собственное подмножество своего суперрасширения. В самом деле, пусть x_1, x_2, x_3 — различные точки из X. Тогда сцепленная система, образованная парами этих точек, согласно 4.9 единственным образом дополняется до МСС ξ пространства X, которая очевидно, не принадлежит $\eta(X)$.

4.19. *Большая база пространства X* — это такое семейство $\mathfrak{B}$ его открытых подмножеств, что для всякого замкнутого множества $F \subset X$ и всякой его окрестности OF найдется такое $V \in \mathfrak{B}$, что $F \subset V \subset OF$.

Наименьшая мощность больших баз пространства X называется его *большим весом* и обозначается через WX.

4.20. Предложение. *Для всякого бесконечного бикомпакта X имеем $wX = WX$.*

Доказательство. Неравенство $wX \leqslant WX$ очевидно. Для проверки обратного неравенства достаточно показать, что конечные суммы элементов любой базы пространства X образуют его большую базу. Но это непосредственно вытекает из бикомпактности замкнутых подмножеств пространства X.

4.21. Теорема. *Для бесконечного бикомпакта X имеем $wX = w\lambda X$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что λX имеет предбазу мощности wX. Согласно 4.20 в X имеется большая база $\mathfrak{B}$ мощности wX. Пусть $\xi \in \lambda X$ и $O(U)$ — предбазисная окрестность точки ξ. Это означает, что существует такое $F \in \xi$, которое лежит в U. Тогда найдется такое $V \in \mathfrak{B}$, что $F \subset V \subset U$, откуда $\xi \in O(V) \subset O(U)$. Таким образом, семейство $\{O(V) \colon V \in \in \mathfrak{B}\}$ — предбаза λX мощности wX. Теорема доказана.

4.22. Отображение λf. Пусть $f \colon X \to Y$ — непрерывное отображение бикомпактов. Тогда для $\xi \in \lambda X$ система $\{f(F) \colon F \in \xi\}$ является МСС пространства $f(X)$. Согласно 4.9 эта система однозначно достраивается до МСС пространства Y, которую обозначим $\lambda f(\xi)$. Итак, определено отображение $\lambda f \colon \lambda X \to \lambda Y$, которое непрерывно в силу непосредственно проверяемого равенства

$$(\lambda f)^{-1} O(U) = O(f^{-1} U). \tag{5}$$

4.23. Предложение. *Операция λ является ковариантным функтором в категории* Comp.

Доказательство с учетом 4.17 и 4.22 сводится к непосредственной проверке равенства $\lambda(g \circ f) = \lambda g \circ \lambda f$.

4.24. Предложение. *Всякая МСС $\xi \in \lambda X$ замкнута в* $\exp X$.

Доказательство. Пусть $F \in \exp X \setminus \xi$. Согласно 4.8 найдется такое $A \in \xi$, что $F \cap A = \varnothing$. Тогда множество $O\langle X \setminus A \rangle$ — окрестность «точки» $F \in \exp X$, не пересекающаяся с ξ согласно тому же предложению 4.8.

4.25. Предложение. *Функтор λ непрерывен.*

Доказательство. Согласно определению 1.11 надо показать, что для любого спектра $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \mathfrak{A}\}$ отображение

$$f = \lim\{\lambda\pi_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}\colon \lambda \lim S \to \lim \lambda S$$

взаимно однозначно и «на». Пусть ξ_1, ξ_2 — различные МСС в $\lim S$. Согласно 4.8 существуют такие $F_i \in \xi_i$, что $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. В силу III.1.32 существует такое $\alpha \in \mathfrak{A}$, что $\pi_\alpha(F_1) \cap \pi_\alpha(F_2) = \varnothing$. Отсюда получаем, что $\lambda\pi_\alpha(\xi_1) \neq \lambda\pi_\alpha(\xi_2)$. Тогда условие (4) из 1.11 дает нам $f(\xi_1) \neq f(\xi_2)$.

Теперь проверим эпиморфность отображения f. Пусть (ξ_α) — нить спектра λS. Тогда $S_\xi = \{\xi_\alpha, \exp\pi^\alpha_\beta|\xi_\alpha, \mathfrak{A}\}$ будет согласно 4.24 спектром из бикомпактов, вложенным в спектр $\exp S$. Положим $\xi = \lim S_\xi$. В силу непрерывности функтора exp (см. 1.13) множество ξ естественно вложено в $\exp\lim S$. Покажем, что ξ — МСС в $\lim S$. Согласно III.1.29 имеем

$$\xi = \cap\{(\exp\pi_\alpha)^{-1}\xi_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}. \tag{6}$$

Тогда если $F_1, F_2 \in \xi$, то $\pi_\alpha(F_i) \in \xi_\alpha$, $i = 1, 2$, в частности $\pi_\alpha(F_1) \cap \pi_\alpha(F_2) \neq \varnothing$ для всякого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Отсюда согласно III.1.32 получаем, что $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$. Итак, система ξ сцеплена. Для доказательства ее максимальности воспользуемся предложением 4.8. Пусть $F \in \exp\lim S$ пересекается с каждым элементом системы ξ. Тогда согласно (6) множество $\pi_\alpha(F)$ пересекается с каждым элементом системы ξ_α и, значит, $\pi_\alpha(F) \in \xi_\alpha$ согласно 4.8. Тогда в силу (6) $F \in \xi$ и, значит, система ξ максимальна.

Остается показать, что $f(\xi) = (\xi_\alpha)$. Семейство $\{\pi_\alpha(F)\colon F \in \xi\}$ — максимальная сцепленная система в пространстве $\pi_\alpha(\lim S) \subset X_\alpha$, лежащая согласно (6) в МСС ξ_α. Тогда по определению отображения $\lambda\pi_\alpha$ имеем $\lambda\pi_\alpha(\xi) = \xi_\alpha$ и, значит, $f(\xi) = (\xi_\alpha)$. Предложение доказано.

4.26. Предложение. *Функтор λ переводит мономорфизмы в мономорфизмы, а эпиморфизмы в эпиморфизмы.*

Первое утверждение вытекает из 4.8, а второе — из того, что для эпиморфизма $f\colon X \to Y$ и сцепленной в Y системы ξ семейство $\{f^{-1}F\colon F \in \xi\}$ сцеплено.

4.27. Метрика на компакте λX. Если X — компакт, то его суперрасширение λX также является компактом согласно 4.21. Пусть ρ — метрика на компакте X. Через $B(F,\varepsilon)$ обозначим замкнутый ε-шар $\{x\colon \rho(x,F)\leqslant\varepsilon\}$ вокруг множества F. Определим метрику $\overline{\rho}$ на λX, полагая

$$\overline{\rho}(\xi_1,\xi_2)=\inf\{\varepsilon\geqslant 0\colon F\in\xi_1\Rightarrow B(F,\varepsilon)\in\xi_2\}.$$

Проверим, что это — метрика. Аксиома тождества выполнена тривиальным образом. Аксиома симметрии. Если $F_2\in\xi_2$ и $B(F_2,\varepsilon)\notin\xi_1$, то согласно 4.8 существует такое множество $F_1\in\xi_1$, что $F_1\cap B(F_2,\varepsilon)=\varnothing$. Но тогда и $F_2\cap B(F_1,\varepsilon)=\varnothing$, т. е. $B(F_1,\varepsilon)\notin\xi_2$. Аксиома треугольника. Пусть $\overline{\rho}(\xi_1,\xi_2)=\varepsilon_1$, $\overline{\rho}(\xi_2,\xi_3)=\varepsilon_2$. Тогда для любого множества $F\in\xi_1$ имеем $B(F,\varepsilon_1)\in\xi_2$, а $B(B(F,\varepsilon_1),\varepsilon_2)\in\xi_3$. Но $B(B(F,\varepsilon_1),\varepsilon_2)=B(F,\varepsilon_1+\varepsilon_2)$.

Расшифровка определений метрик показывает, что $\overline{\rho}$ совпадает с метрикой, порожденной на λX метрикой Хаусдорфа ρ_H^2 на двойной экспоненте $\exp\exp X$. Таким образом, $(\lambda X,\overline{\rho})$ изометрически вложено в $(\exp\exp X,\rho_H^2)$.

Лемма. *Пространство $(\lambda X,\overline{\rho})$ является компактом.*

Доказательство. Надо показать, что из любой последовательности $\varkappa=\{\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots\}\subset(\lambda X,\overline{\rho})$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Переходя в случае надобности к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $\varkappa$ сходится в компакте $(\exp\exp X,\rho_H^2)$ к системе ξ. Покажем сначала, что система ξ сцеплена. Предположим, что $F_1\cap F_2=\varnothing$ для некоторых $F_1,F_2\in\xi$. Тогда для некоторого $\varepsilon>0$ имеем

$$B(F_1,\varepsilon)\cap B(F_2,\varepsilon)=\varnothing. \tag{7}$$

Возьмем такое n, что $\overline{\rho}(\xi_n,\xi)<\varepsilon$. Тогда $B(F_i,\varepsilon)\in\xi_n$, что противоречит либо сцепленности ξ_n, либо условию (7). Остается проверить максимальность системы ξ. Пусть множество $F\in\exp X$ пересекается со всяким элементом ξ. Тогда для $\varepsilon>0$ множество $B(F,\varepsilon)$ пересекается со всяким элементом системы ξ_n при $\overline{\rho}(\xi_n,\xi)<\varepsilon$. Значит, согласно 4.8 множество $B(F,\varepsilon)$ принадлежит всем системам ξ_n, начиная с некоторой. Но тогда $B(F,\varepsilon)\in\xi$, откуда $F\in\xi$ согласно 4.24. Следовательно, ξ — МСС в силу 4.8. Лемма доказана.

Теперь покажем, что метрика $\overline{\rho}$ индуцирует на множестве λX топологию суперрасширения. В силу только что доказанной леммы достаточно проверить, что тождественное отображение $(\lambda X, \overline{\rho}) \to \lambda X$ непрерывно. Пусть $\xi \in O(U)$, где U открыто в X. Это означает существование такого множества $F \in \xi$, что $F \subset \subset U$. Но F лежит в открытом множестве U вместе с некоторой ε-окрестностью $B(F, \varepsilon)$. Тогда $\overline{\rho}(\xi', \xi) < \varepsilon$ влечет $\xi' \in O(U)$.

4.28. Теорема. *Суперрасширение λX всякого бикомпакта X — подпространство второй экспоненты* $\exp\exp X$.

Доказательство. Для метризуемого X утверждение доказано в 4.27. Произвольный бикомпакт X — предел спектра $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \mathfrak{A}\}$, состоящего из компактов и отображений «на». Заметим, что если $f\colon X \to Y$ — эпиморфизм, то $\lambda f = \exp\exp f|\lambda X$. Применим к спектру S функторы λ и $\exp\exp$. Пределы спектров λS и $\exp\exp S$ гомеоморфны бикомпактам λX и $\exp\exp X$. Все пространства спектра λS в силу их метризуемости являются подпространствами соответствующих пространств спектра $\exp\exp S$, а все проекции спектра λS — ограничения проекций спектра $\exp\exp S$ на эти подпространства. Поэтому предел $\lim \lambda S = \lambda X$ естественно вкладывается в $\lim \exp\exp S = \exp\exp X$, причем это вложение, как легко видеть, совпадает с тождественным вложением. Теорема доказана.

4.29. Замечание. Несмотря на теорему 4.28, функтор λ не является подфунктором функтора $\exp\exp$, поскольку для всякого не являющегося эпиморфизмом отображения $f\colon X \to Y$ отображение λf не вкладывается в отображение $\exp\exp f$.

§ 5. Нормальные и монадичные функторы

5.1. В этом параграфе, по-прежнему, под функтором понимаем ковариантный функтор, действующий в категории Comp.

Говорят, что функтор $\mathscr{F}$ *сохраняет точку*, если он переводит одноточечное пространство в одноточечное.

5.2. Предложение. *Если функтор $\mathscr{F}$ сохраняет точку, то существует не более одного естественного преобразования $\varphi\colon \mathrm{Id} \to \mathscr{F}$.*

Доказательство. Пусть $i_x\colon \{x\} \to X$ — тождественное вложение. Тогда по определению естественного преобразования получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \{x\} \arrow[r, "\varphi_{\{x\}}"] \arrow[d, "i_x"'] & \mathscr{F}(\{x\}) \arrow[d, "\mathscr{F}(i_x)"] \\ X \arrow[r, "\varphi_X"] & \mathscr{F}(x) \end{tikzcd} \tag{1}$$

Поскольку $\mathscr{F}$ сохраняет точку отображение $\varphi_{\{x\}}$ определено однозначно. Поэтому точка $\varphi_X(x) = \mathscr{F}(i_x)\varphi_{\{x\}}i_x^{-1}(x)$ определена независимо от выбора преобразования φ. Предложение доказано.

5.3. Предложение. *Для функтора $\mathscr{F}$ и бикомпактов X и Y существует единственное такое отображение*

$$j_{\mathscr{F}XY}\colon \mathscr{F}(X) \times Y \to \mathscr{F}(X \times Y),$$

что для всякого $y \in Y$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(X) \times \{y\} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathscr{F}(X)} \times i_y"] \arrow[d, "h_y"'] & \mathscr{F}(X) \times Y \arrow[d, "j_{\mathscr{F}XY}"] \\ \mathscr{F}(X \times \{y\}) \arrow[r, "\mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times i_y)"] & \mathscr{F}(X \times Y) \end{tikzcd} \tag{2}$$

где $i_y\colon \{y\} \to Y$ — вложение, а h_y — естественный гомеоморфизм, определяемый как композиция $\mathscr{F}(X) \times \{y\} \xrightarrow{p_1} \mathscr{F}(X) \xrightarrow{\mathscr{F}(g_y)} \mathscr{F}(X \times \{y\})$, в которой $g_y(x) = (x, y)$.

Доказательство. На каждом «горизонтальном» слое $\mathscr{F}(X) \times \{y\}$ произведения $\mathscr{F}(X) \times Y$ отображение $j_{\mathscr{F}XY}$ совпадает с композицией $\mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times i_y) \circ h_y$.

5.4. Предложение. *Для всякого непрерывного отображения $f\colon Y \to Z$ коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(X) \times Y \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathscr{F}(X)} \times f"] \arrow[d, "j_{\mathscr{F}XY}"'] & \mathscr{F}(X) \times Z \arrow[d, "j_{\mathscr{F}XZ}"] \\ \mathscr{F}(X \times Y) \arrow[r, "\mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times f)"] & \mathscr{F}(X \times Z) \end{tikzcd} \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $a \in \mathscr{F}(X)$, $y \in Y$. Тогда из коммутативности диаграммы (2) получаем $j_{\mathscr{F}XY}(a, y) = \mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times \times i_y)h_y(a, y)$. Значит, $\mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times f) \circ j_{\mathscr{F}XY}(a, y) = \mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times f) \circ \circ \mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times i_y) \circ h_y(a, y) = \mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times (f \circ i_y)) \circ h_y(a, y)$.

С другой стороны,

$$j_{\mathscr{F}XY}(a, f(y)) = \mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times i_{f(y)})h_{f(y)}(a, f(y)).$$

Поэтому коммутативность диаграммы (3) вытекает из очевидной коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(X) \times \{y\} & \longrightarrow & \mathscr{F}(X) \times \{f(y)\} \\ {\scriptstyle h_y}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_{f(y)}} \\ \mathscr{F}(X \times \{y\}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(X \times \{f(y)\}) \end{array} \qquad (4)$$

Предложение доказано.

5.5. Предложение. *Если функтор $\mathscr{F}$ непрерывен и сохраняет точку, то отображение $j_{\mathscr{F}XY}$ непрерывно.*

Доказательство. Предположим сначала, что доказана непрерывность отображения $j_{\mathscr{F}XY}$ для нульмерных Y. Тогда для произвольного бикомпакта Z существует нульмерный бикомпакт Y и эпиморфизм $f\colon Y \to Z$. В коммутативной диаграмме (3) отображение $j_{\mathscr{F}XZ}$ — левый делитель непрерывного отображения

$$j_{\mathscr{F}XZ} \circ \mathrm{id}_{\mathscr{F}(X)} \times f = \mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times f) \circ j_{\mathscr{F}XY}.$$

А правый делитель $\mathrm{id}_{\mathscr{F}(X)} \times f$ этого отображения — эпиморфизм. В таких условиях отображение $j_{\mathscr{F}XZ}$ непрерывно.

Докажем теперь непрерывность $j_{\mathscr{F}XY}$ для нульмерного Y. Представим бикомпакт Y в виде предела обратного спектра $S = \{Z_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \mathfrak{A}\}$ из конечных пространств. Тогда бикомпакт $\mathscr{F}(X) \times Y$ — предел обратного спектра $\mathscr{F}(X) \times S = \{\mathscr{F}(X) \times \times Z_\alpha, \mathscr{F}(\mathrm{id}_X) \times \pi^\alpha_\beta, \mathfrak{A}\}$. В силу непрерывности функтора $\mathscr{F}$ бикомпакт $\mathscr{F}(X \times Y)$ является пределом обратного спектра $\mathscr{F}(X \times \times S) = \{\mathscr{F}(X \times Z_\alpha), \mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times \pi^\alpha_\beta), \mathfrak{A}\}$. Далее, согласно предложению 5.4 отображения $\{j_{\mathscr{F}XZ_\alpha}, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, которые очевидным образом непрерывны для конечных пространств Z_α, образуют морфизм J спектра $\mathscr{F}(X) \times S$ в спектр $\mathscr{F}(X \times S)$. Определено предельное отображение $\lim J\colon \mathscr{F}(X) \times Y \to \mathscr{F}(X \times Y)$. Осталось проверить, что $\lim J = j_{\mathscr{F}XY}$. Для этого в силу единственности $j_{\mathscr{F}XY}$ достаточно проверить, что диаграмма (2) останется коммутативной, если отображение $j_{\mathscr{F}XY}$ заменим на $\lim J$. Возьмем некоторый элемент Z_α спектра S и точку $y \in Y$.

Существует такое вложение $e^\alpha\colon Z_\alpha \to Y$, что

$$e^\alpha(\pi_\alpha(y)) = y$$

и

$$\pi_\alpha \circ e^\alpha = \mathrm{id}_{Z_\alpha}.$$

Тогда коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(X) \times Y \arrow[d, "\lim J"'] & \mathscr{F}(X) \times Z_\alpha \arrow[l, "\mathrm{id}_{\mathscr{F}(X)} \times e^\alpha"'] \arrow[d, "j_{\mathscr{F}XZ_\alpha}"] \\
\mathscr{F}(X \times Y) & \mathscr{F}(X \times Z_\alpha) \arrow[l, "\mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times e^\alpha)"']
\end{tikzcd} \tag{5}$$

В самом деле, пусть $\alpha < \beta \in \mathfrak{A}$. Положим $e^\alpha_\beta = \pi_\beta \circ e^\alpha$. Тогда по предложению 5.4 коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(X) \times Z_\beta \arrow[d, "j_{\mathscr{F}XZ_\beta}"'] & \mathscr{F}(X) \times Z_\alpha \arrow[l, "\mathrm{id}_{\mathscr{F}(X)} \times e^\alpha_\beta"'] \arrow[d, "j_{\mathscr{F}XZ_\alpha}"] \\
\mathscr{F}(X \times Z_\beta) & \mathscr{F}(X \times Z_\alpha) \arrow[l, "\mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times e^\alpha_\beta)"']
\end{tikzcd} \tag{6}$$

Поэтому диаграмма (5) коммутативна как предел коммутативных диаграмм (6).

Обозначим $\pi^y_\alpha\colon \{y\} \to Z_\alpha$ ограничение отображения π_α на одноточечное подпространство $\{y\} \subset Y$. Тогда из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & \{y\} \arrow[dl, "i_y"'] \arrow[dr, "\pi^y_\alpha"] & \\
Y & & Z_\alpha \arrow[ll, "e^\alpha"']
\end{tikzcd} \tag{7}$$

вытекает коммутативность диаграмм

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{F}(X) \times \{y\} \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathscr{F}(X)} \times i_y"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathscr{F}(X)} \times \pi^y_\alpha"] & \\
\mathscr{F}(X) \times Y & & \mathscr{F}(X) \times Z_\alpha \arrow[ll, "\mathrm{id}_{\mathscr{F}(X)} \times e^\alpha"']
\end{tikzcd} \tag{8}$$

и

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{F}(X \times \{y\}) \arrow[dl, "\mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times i_y)"'] \arrow[dr, "\mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times \pi^y_\alpha)"] & \\ \mathscr{F}(X \times Y) & & \mathscr{F}(X \times Z_\alpha) \arrow[ll, "\mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times e^\alpha)"'] \end{tikzcd} \tag{9}$$

Это вместе с коммутативностью диаграммы (5) и

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(X) \times \{y\} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathscr{F}(X)} \times \pi^y_\alpha"] \arrow[d, "h_y"'] & \mathscr{F}(X) \times Z_\alpha \arrow[d, "j_{\mathscr{F} X Z_\alpha}"] \\ \mathscr{F}(X \times \{y\}) \arrow[r, "\mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times \pi^y_\alpha)"] & \mathscr{F}(X \times Z_\alpha) \end{tikzcd} \tag{10}$$

(коммутативность последней диаграммы вытекает как из коммутативности диаграммы (2), так и из предложения 5.4, поскольку очевидно, что $h_y = j_{\mathscr{F}X\{y\}}$) дает коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(X) \times \{y\} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathscr{F}(X)} \times i_y"] \arrow[d, "h_y"'] & \mathscr{F}(X) \times Y \arrow[d, "\lim J"] \\ \mathscr{F}(X \times \{y\}) \arrow[r, "\mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times i_y)"] & \mathscr{F}(X \times Y) \end{tikzcd} \tag{11}$$

Предложение 5.5 доказано.

5.6. Предложение. *Для сохраняющего точку непрерывного функтора $\mathscr{F}$ существует единственное естественное преобразование $\eta\colon \mathrm{Id} \to \mathscr{F}$. При этом отображение $\eta_X\colon X \to \mathscr{F}(X)$ определяется как композиция*

$$X \to \mathscr{F}(1) \times X \xrightarrow{j_{\mathscr{F}1X}} \mathscr{F}(1 \times X) \to \mathscr{F}(X).$$

Доказательство. В силу предложения 5.2 достаточно показать, что так определенное отображение η_X делает коммутативной диаграмму из определения естественного преобразования. Но это легко вытекает из предложения 5.4.

5.7. Пусть $i_A\colon A \to X$ — тождественное вложение замкнутого подпространства. Через $\mathscr{F}_X(A)$ обозначается образ отображения $\mathscr{F}(i_A)$. Говорят, что функтор $\mathscr{F}$ *сохраняет пересечения,* если для любого X и любого семейства $\{A_\alpha\}$ его замкнутых подмножеств

$$\mathscr{F}_X(\bigcap_\alpha A_\alpha) = \bigcap_\alpha \mathscr{F}_X(A_\alpha). \tag{12}$$

Для непрерывного функтора $\mathscr{F}$ достаточно требовать выполнения равенства (12) для двух пересекаемых множеств, потому что тогда оно выполнено для всех конечных пересечений, а они образуют обратный спектр, предел которого совпадает с пересечением всех множеств.

5.8. Функтор $\mathscr{F}$ называется *сохраняющим прообразы*, если

$$\mathscr{F}(f)^{-1}\mathscr{F}_Y(A) = \mathscr{F}_X(f^{-1}A) \tag{13}$$

для любого отображения $f\colon X \to Y$ и любого замкнутого $A \subset Y$.

5.9. Функтор $\mathscr{F}$ называется *мономорфным* (соответственно *эпиморфным*), если для любого взаимно однозначного отображения f (соответственно для любого отображения «на») отображение $\mathscr{F}(f)$ также взаимно однозначно (соответственно является отображением «на»).

5.10. Определение. Функтор $\mathscr{F}$ назовем *полунормальным*, если он:

1) сохраняет точку и пустое множество;
2) сохраняет пересечения;
3) мономорфен;
4) непрерывен.

5.11. Предложение. *Для полунормального функтора $\mathscr{F}$ отображение $j_{\mathscr{F}XY}$ — вложение.*

Доказательство. На каждом «горизонтальном» слое $\mathscr{F}(X) \times y$ произведения $\mathscr{F}(X) \times Y$ отображение $j_{\mathscr{F}XY}$ инъективно, поскольку в коммутативной диаграмме (2) отображение $\mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times i_y)$ является мономорфизмом в силу сохранения мономорфизмов функтором $\mathscr{F}$.

Что касается разных слоев $\mathscr{F}(X) \times \{y_1\}$ и $\mathscr{F}(X) \times \{y_2\}$, то их образы содержатся в $\mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times i_{y_1})(\mathscr{F}(X \times \{y_1\}))$ и $\mathscr{F}(\mathrm{id}_X \times \times i_{y_2})(\mathscr{F}(X \times \{y_2\}))$ соответственно. Но последние множества не пересекаются, поскольку функтор $\mathscr{F}$ сохраняет пересечения и пустое множество. Применение предложения 5.5 завершает доказательство.

Из предложений 5.6 и 5.11 вытекает

5.12. Предложение. *Тождественный функтор является подфунктором всякого полунормального функтора $\mathscr{F}$. При этом вложение* $\mathrm{Id} \subset \mathscr{F}$ *определено однозначно.*

5.13. Определение. Полунормальный функтор называется *почти нормальным*, если он сохраняет прообразы и вес бесконечных бикомпактов. Почти нормальный эпиморфный функтор называется *нормальным*.

5.14. Для сохраняющего пересечения функтора $\mathscr{F}$ определен *носитель* $\operatorname{supp} a$ всякой точки $a \in \mathscr{F}(X)$:

$$\operatorname{supp} a = \cap\{A \subset X\colon A \text{ замкнуто и } a \in \mathscr{F}_X(A)\}.$$

Формально носитель точки определен для любого функтора, но может оказаться пустым. Если же функтор $\mathscr{F}$ сохраняет пересечения и пустое множество, то $\operatorname{supp} a \neq \varnothing$ для всякой точки $a \in \mathscr{F}(X)$ и $a \in \mathscr{F}_X(\operatorname{supp} a)$. Далее, когда говорим о носителе точки $a \in \mathscr{F}(X)$, предполагаем, что функтор $\mathscr{F}$ сохраняет пересечения и пустое множество.

5.15. Скажем, что функтор $\mathscr{F}$ *сохраняет носители*, если для любого отображения $f\colon X \to Y$ и всякого $a \in \mathscr{F}(X)$ верно

$$f(\operatorname{supp} a) = \operatorname{supp} F(f)(a). \tag{14}$$

5.16. Предложение. *Мономорфный функтор $\mathscr{F}$ сохраняет носители тогда и только тогда, когда он сохраняет прообразы.*

Доказательство. Достаточность. Для всякого замкнутого множества $A \subset X$ пространство $\mathscr{F}(A)$ естественно отождествляется с подпространством $\mathscr{F}_X(A) \subset \mathscr{F}(X)$ (см. 5.7). Пусть $A = \operatorname{supp} a$. Тогда $\mathscr{F}(f)(a) \in \mathscr{F}(f)(\mathscr{F}(A)) \subset \mathscr{F}(f(A))$, т.е. $\operatorname{supp} \mathscr{F}(f)(a) \subset f(\operatorname{supp} a)$. Наоборот, пусть $B = \operatorname{supp} \mathscr{F}(f)(a)$. Тогда, поскольку $\mathscr{F}$ сохраняет прообразы, имеем

$$\mathscr{F}(f^{-1}B) = \mathscr{F}(f)^{-1}\mathscr{F}(B) \supset \mathscr{F}(f)^{-1}\mathscr{F}(f)(a) \ni a.$$

Значит, $\operatorname{supp} a \subset f^{-1}B$, т.е. $f(\operatorname{supp} a) \subset B$.

Необходимость. Поскольку отображение f переводит $f^{-1}A$ в A, имеем $\mathscr{F}(f)(\mathscr{F}(f^{-1}A)) \subset \mathscr{F}(A)$ и, значит,

$$\mathscr{F}(f^{-1}A) \subset \mathscr{F}(f)^{-1}\mathscr{F}(f)(\mathscr{F}(f^{-1}A)) \subset \mathscr{F}(f)^{-1}\mathscr{F}(A).$$

Таким образом, проверка включения $\supset$ в равенстве (13) не потребовала сохранения носителей функтором $\mathscr{F}$. Теперь противоположное включение $\subset$. Пусть $a \in \mathscr{F}(f)^{-1}\mathscr{F}(A)$. Тогда $\mathscr{F}(f)(a) \subset \subset \mathscr{F}(A)$ и, значит, $\operatorname{supp}\mathscr{F}(f)(a) \subset A$. Из сохранения носителей получаем $f(\operatorname{supp} a) \subset A$. Следовательно, $\operatorname{supp} a \subset f^{-1}A$ и $a \in \in \mathscr{F}(f^{-1}A)$. Предложение доказано.

Приведем примеры нормальных и близких к ним функторов.

5.17. Предложение. *Функтор* $\exp$ *и его подфункторы* $\exp_n$ *нормальны, а функтор* $\exp^c$ *почти нормален.*

Все нетривиальные составляющие этого утверждения проверены в § 1.

5.18. Предложение. *Функтор P и его подфункторы P_n нормальны.*

Доказательство. В § 3 были проверены все свойства нормальности, кроме сохранения прообразов и пересечений. Но функтор P и, следовательно, его подфункторы P_n, сохраняют носители (3.29), что согласно 5.16 эквивалентно сохранению прообразов.

Проверим, что P сохраняет попарные и, значит, в силу непрерывности всевозможные пересечения. Отсюда автоматически вытекает аналогичное свойство функтора P_n. Пусть $Y_1, Y_2 \subset X$ и $\mu \in P(Y_1) \cap P(Y_2)$. Это означает, что для любой функции $\varphi \in \in C(Y_i)$ и для любых двух ее продолжений φ', φ'' на X имеем $\mu(\varphi') = \mu(\varphi'')$. Другими словами, если $\varphi \in C(X)$ и $\varphi(Y_i) = 0$, то $\mu(\varphi) = 0$. Пусть $\varphi(Y_1 \cap Y_2) = 0$. Рассмотрим функцию $\psi'\colon Y_1 \cup \cup Y_2 \to \mathbb{R}$, равную φ на Y_1 и нулю на Y_2. Пусть ψ — произвольное продолжение функции ψ' на X. Поскольку $\mu \in P(Y_1)$, имеем $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$. Но $\psi(Y_2) = 0$ и $\mu \in P(Y_2)$. Значит, $\mu(\psi) = 0$. Итак, $\mu(\varphi) = 0$ и, следовательно, $\mu \in P(Y_1 \cap Y_2)$. Включение $P(Y_1 \cap \cap Y_2) \subset P(Y_1) \cap P(Y_2)$ тривиально. Предложение доказано.

5.19. Предложение. *Функтор λ удовлетворяет всем условиям нормальности, кроме сохранения прообразов.*

Доказательство. Ретракция r трехточечного пространства $X = \{0, 1, 2\}$ на двухточечное $Y = \{0, 1\}$ показывает, что λ не сохраняет прообразы. В самом деле, пусть, например, $r(2) = 0$. Тогда $\lambda(r^{-1}(0)) = \{0, 2\}$. В то же время для МСС $\xi \in \lambda X$, порожденной всеми двухточечными подмножествами X, имеем $\lambda r(\xi) = 0$, но $\xi \notin \lambda(r^{-1}(0))$.

С учетом уже проверенных в § 4 свойств функтора λ остается доказать, что λ сохраняет попарные пересечения. Пусть $Y_1, Y_2 \subset X$ и $\xi \in \lambda Y_1 \cap \lambda Y_2$. Условие $\xi \in \lambda Y_i$ равносильно тому, что $\xi_i = \{F \cap Y_i \colon F \in \xi\}$ есть МСС в Y_i. Надо показать, что $\xi_0 = \{F \cap Y_1 \cap Y_2 \colon F \in \xi\}$ есть МСС в $Y_1 \cap Y_2$. Для этого согласно 4.8 достаточно проверить, что $(Y_1 \cap Y_2) \cap F \neq \varnothing$ для всех $F \in \xi$. Но из $\xi \in \lambda Y_i$ вытекает, что $F \cap Y_i \in \xi_i \subset \xi$. Поэтому $(Y_1 \cap Y_2) \cap F = (Y_1 \cap F) \cap (Y_2 \cap F) \neq \varnothing$. Предложение доказано.

5.20. Для функторов $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ через $\mathscr{F}_2 \circ \mathscr{F}_1$ обозначим функтор, переводящий X в $\mathscr{F}_2(\mathscr{F}_1(X))$ и f в $\mathscr{F}_2(\mathscr{F}_1(f))$. Это определение композиции двух функторов распространяется на любые конечные последовательности функторов. Для натурального n через $\mathscr{F}^n$ обозначим n-ю итерацию функтора $\mathscr{F}$, т. е. функтор, равный композиции n функторов $\mathscr{F}$.

5.21. Определение. *Монадой* (или *тройкой*) *на категории* $\mathscr{C}$ называется тройка $T = \langle \mathscr{F}, \psi, \eta \rangle$, где $\mathscr{F} \colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ — функтор, $\eta \colon \mathrm{Id} \to \mathscr{F}$ (единица) и $\psi \colon \mathscr{F}^2 \to \mathscr{F}$ (умножение) — естественные преобразования. При этом для каждого объекта X выполнены равенства:

$$\psi_X \circ \mathscr{F}(\eta_X) = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(X)}, \tag{15}$$

$$\psi_X \circ \eta_{\mathscr{F}(X)} = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(X)}, \tag{16}$$

$$\psi_X \circ \mathscr{F}(\psi_X) = \psi_X \circ \psi_{\mathscr{F}(X)}. \tag{17}$$

Функтор $\mathscr{F}$ называется ***монадичным***, если он может быть включен в некоторую монаду.

Для удобства обращения к равенствам (15), (16), (17) будем говорить, что «η является правой единицей» (15) или «η является левой единицей» (16). Равенство (17) естественно при этом назвать ассоциативностью умножения монады.

Отметим, что, несмотря на единственность естественного преобразования $\eta \colon \mathrm{Id} \to \mathscr{F}$ для полунормального функтора $\mathscr{F}$, вложения $\eta_{\mathscr{F}(X)}\colon \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}^2(X)$ и $\mathscr{F}(\eta_X)\colon \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}^2(X)$ различны даже для функтора $\mathscr{F} = \exp$.

5.22. Предложение. *Функтор* exp *монадичен.*

Доказательство. В качестве отображения $\psi_X = \psi\colon \exp\exp X \to \exp X$ возьмем ретракцию объединения, т. е. для $\alpha \in \exp\exp X$ положим $\psi(\alpha) = \cup\{A \in \exp X\colon A \in \alpha\}$. Из IV.8.7 вытекает, что отображение ψ определено корректно, т. е. $\psi(\alpha)$ замкнуто в X.

Теперь докажем, что отображение ψ непрерывно. Это вытекает из равенств

$$\psi^{-1}O\langle U\rangle = O\langle O\langle U\rangle\rangle, \tag{18}$$

$$\psi^{-1}O\langle U, X\rangle = O\langle O\langle U, X\rangle, \exp X\rangle. \tag{19}$$

Проверим одно из них, например (19). Условие $\alpha \in O\langle O\langle U, X\rangle, \exp X\rangle$ эквивалентно условию $\alpha \cap O\langle U, X\rangle \neq \varnothing$, что в свою очередь эквивалентно существованию множества $A \in \alpha$, пересекающегося с U. Но последнее условие в точности совпадает с $\psi(\alpha) \in O\langle U, X\rangle$.

Единица $\eta\colon \mathrm{Id} \to \exp$ определена единственным образом согласно 5.12. Отображение η_X переводит X в $\exp_1 X$. Проверка равенств (15), (16), (17) предоставляется читателю.

5.23. Предложение. *Функтор P монадичен.*

Доказательство. Каждой функции $\varphi \in C(X)$ сопоставим функцию $u(\varphi) \in C(M(X))$, полагая

$$u(\varphi)(\mu) = \mu(\varphi). \tag{20}$$

Функция $u(\varphi)$ непрерывна в топологии, определяемой нормой на $M(X)$, поскольку она линейна и ограничена: $\|u(\varphi)\| \leqslant \|\varphi\|$. Тем более $u(\varphi)$ непрерывна в слабой топологии $M(X)$. Отображение $u\colon C(X) \to C(M(X))$ является вложением, сопоставляющим всякой функции на X ее продолжение на объемлющее пространство $M(X)$. Ограничившись продолжением функций лишь на $P(X)$, получаем, что равенство (20) определяет вложение $u\colon C(X) \to C(P(X))$. Двойственное к вложению u отображение $\psi\colon M(P(X)) \to M(X)$ — ретракция. Она определяется равенством

$$\psi(\mu)(\varphi) = \mu(u(\varphi)). \tag{21}$$

Непрерывность отображения ψ вытекает из равенства

$$\psi(O(\mu, u(\varphi_1), \ldots, u(\varphi_k), \varepsilon)) = O(\psi(\mu), \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \varepsilon), \tag{22}$$

которое в свою очередь непосредственно следует из (21).

Ясно также, что $\psi(P(P(X)) = P(X)$. Проверка условий (15), (16), (17), где роль η играет вложение Дирака, предоставляется читателю.

5.24. Предложение. *Функтор λ монадичен.*

Опишем только ретракцию монады $\psi\colon \lambda^2(X) \to \lambda X$, предоставив читателю проверку ее непрерывности и выполнимости остальных условий монады. Для $\Xi \in \lambda^2(X)$ положим

$$\psi(\Xi) = \{A \in \exp X : A \in \cap\mathscr{A}, \mathscr{A} \in \Xi\}. \tag{23}$$

Система $\psi(\Xi)$ сцеплена. В самом деле, пусть $A_1, A_2 \in \psi(\Xi)$. Тогда согласно (23) существуют такие $\mathscr{A}_i \in \Xi$, что $A_i \in \cap\mathscr{A}_i$. В силу сцепленности Ξ существует МСС ξ в X, которая принадлежит $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2$. Тогда $A_1, A_2 \in \xi$ и, значит, $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$.

Теперь проверим максимальность системы $\psi(\Xi)$. Пусть множество $B \in \exp X$ пересекается со всеми элементами системы $\psi(\Xi)$. Тогда множество B^+ пересекается со всеми $\mathscr{A} \in \Xi$. В самом деле, пусть $B^+ \cap \mathscr{A} = \varnothing$. Это означает, что $B \notin \xi$ для всех $\xi \in \mathscr{A}$. Для каждого ξ согласно 4.8 найдется такое $A_\xi \in \xi$, что $B \cap A_\xi = \varnothing$. Возьмем окрестность OA_ξ так, что $B \cap [OA_\xi] = \varnothing$. Из покрытия $\{O(OA_\xi) : \xi \in \mathscr{A}\}$ бикомпакта $\mathscr{A} \subset \lambda X$ выберем конечное подпокрытие $\{O(OA_{\xi_i}) : i = 1, \ldots, n\}$. Положим $C = \cup \cup\{[OA_{\xi_i}] : i = 1, \ldots, n\}$. Тогда $B \cap C = \varnothing$ и получим противоречие, если покажем, что $C \in \cap\mathscr{A}$. Всякое $\xi \in \mathscr{A}$ содержится в некотором OA_{ξ_i}. Тогда найдется такое $D \in \xi$, что $D \subset OA_{\xi_i} \subset \subset [OA_{\xi_i}]$. Значит,

$$[OA_{\xi_i}] \in \xi \text{ и тем более } C \in \xi.$$

Итак, предположив, что $B^+ \cap \mathscr{A} = \varnothing$, получили противоречие. Следовательно, B^+ пересекается со всеми элементами МСС Ξ и, согласно 4.8 $B^+ \in \Xi$. Но тогда $B \in \cap B^+$ есть элемент системы $\psi(\Xi)$, которая в силу 4.8 оказывается максимальной.

5.25. Определение. Тройку $T = \langle \mathscr{F}, \psi, \eta \rangle$, удовлетворяющую всем условиям определения 5.21 за исключением ассоциативности умножения, назовем *полумонадой*, а функтор $\mathscr{F}$ — *полумонадичным*.

5.26. Теорема. *Для функтора* exp *существует единственная полумонада* $\langle \exp, \cup, \{\cdot\}\rangle$, *в которую он может быть включен.*

Доказательство. То, что указанная тройка является монадой, уже обсуждалось в 5.22. Единственность единицы вытекает из предложения 5.2. Проверим единственность умножения. Пусть ψ — умножение некоторой полумонады для exp.

1°. Сначала проверим, что для всякого $A \in \exp^2 X$ имеет место включение

$$\psi_X(A) \subset \cup\{a \in \exp X \colon a \in A\}. \tag{24}$$

Положим $\cup\{a \in \exp X \colon a \in A\} = B$. Из определения множества B получаем, что $A \subset \exp B$ и, значит, $A \in \exp^2 B$. Поскольку ψ — естественное преобразование, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\exp^2 B \arrow[r, "\psi_B"] \arrow[d, hook] & \exp B \arrow[d, hook] \\
\exp^2 X \arrow[r, "\psi_X"] & \exp X
\end{tikzcd}$$

Поэтому $\psi_X(A) = \psi_B(A) \in \exp B$, т. е. $\psi_X(A) \subset B$ и включение (24) имеет место.

2°. Проверку обратного включения

$$\psi_X(A) \supset B \tag{25}$$

проведем в несколько этапов. Для одноэлементных A, т. е. для $A \in \exp X$, это верно, поскольку ψ_X — ретракция ($\eta = \{\cdot\}$ — левая единица). Предположим, что доказано включение (25) для конечных $A \subset \exp X$. Тогда для произвольных A включение (25) получается переходом к пределу во включении (25) для конечных подмножеств $A' \subset A$, поскольку они аппроксимируют A, а их суммы $\cup A'$ аппроксимируют $\cup A$. Всюду ниже предполагаем, что A конечно.

3°. Теперь проверим, что из справедливости включения (25) для нульмерных X вытекает его справедливость для произвольных X. Пусть $f\colon X_0 \to X$ — эпиморфизм нульмерного бикомпакта X_0 на X. Тогда коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \exp^2 X_0 \arrow[r, "\psi_{X_0}"] \arrow[d, "\exp^2 f"'] & \exp X_0 \arrow[d, "\exp f"] \\ \exp^2 X \arrow[r, "\psi_X"] & \exp X \end{tikzcd} \tag{26}$$

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ — конечное подмножество $\exp X$. Положим $a_i^\circ = f^{-1}a_i$ и $A_0 = \{a_1^\circ, \dots, a_k^\circ\}$. Тогда по предположению $\psi_{X_0}(A_0) = B_0 = a_1^\circ \cup \ldots \cup a_k^\circ$, а $\exp f(\psi_{X_0}(A_0)) = a_1 \cup \ldots \cup a_k$. Из коммутативности диаграммы (26) получаем $a_1 \cup \ldots \cup a_k = \psi_X(\exp^2 f(A_0))$, но $\exp^2 f(A_0) = A$, откуда $\psi_X(A) = a_1 \cup \ldots \cup a_k$.

4°. Теперь покажем, что из справедливости включения (25) для конечных X вытекает его справедливость для нульмерных X. Представим нульмерный бикомпакт X в виде предела обратного спектра $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \mathfrak{A}\}$ из конечных пространств X_α. Пусть по-прежнему $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset \exp X$ и $B = a_1 \cup \ldots \cup a_k$. Предположим, что некоторая точка $x \in B$ не принадлежит множеству $\psi_X(A)$. Тогда существует окрестность Ox, не пересекающаяся с $\psi_X(A)$. Существует такое $\alpha \in \mathfrak{A}$ и такая окрестность Ox_α точки $x_\alpha = \pi_\alpha(x)$, что $\pi_\alpha^{-1}Ox_\alpha \subset Ox$. Тогда из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} \exp^2 X \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[d, "\exp^2 \pi_\alpha"'] & \exp X \arrow[d, "\exp \pi_\alpha"] \\ \exp^2 X_\alpha \arrow[r, "\psi_{X_\alpha}"] & \exp X_\alpha \end{tikzcd}$$

вытекает, что

$$x_\alpha \notin \psi_{X_\alpha}(\exp^2 \pi_\alpha(A)). \tag{27}$$

С другой стороны, по сделанному предположению для $A_\alpha = \{\pi_\alpha(a_1), \dots, \pi_\alpha(a_k)\}$ имеем

$$\psi_{X_\alpha}(A_\alpha) = \pi_\alpha(a_1) \cup \ldots \cup \pi_\alpha(a_k) = \pi_\alpha(B) \ni x_\alpha. \tag{28}$$

Но $A_\alpha = \exp^2 \pi_\alpha(A)$ и, следовательно, (27) противоречит (28).

5°. Осталось проверить включение (25) для конечных X. Предположим сначала, что множества a_i попарно не пересекаются и состоят из одинакового числа точек $a_i = \{x_1^i, \ldots, x_n^i\}$. Предположим, что $x_j^i \notin \psi_X(A)$ для некоторых i и j. Возьмем любую другую точку $x_{j_1}^{i_1}$. Существует такая биекция $f\colon X \to X$, что $f(x_j^i) = x_{j_1}^{i_1}$ и $\exp^2 f(A) = A$. В самом деле, если $i = i_1$, надо взять биекцию a_i на себя, переводящую x_j^i в $x_{j_1}^{i_1}$, и дополнить до f тождественным отображением на $X \setminus a_i$. Если $i \neq i_1$, то можно взять такую биекцию g множества $a_i \cup a_{i_1}$ на себя, что $g(a_i) = a_{i_1}$ и $g(x_j^i) = x_{j_1}^{i_1}$. После этого, как и в первом случае, надо g дополнить тождественным отображением на $X \setminus a_i \cup a_{i_1}$.

Из равенства $\exp f \circ \psi_X = \psi_X \circ \exp^2 f$ вытекает

$$\exp f \circ \psi_X(A) = \psi_X(A). \tag{29}$$

Если рассматривать $C = \psi_X(A)$ как подмножество X, то (29) эквивалентно равенству $C = f(C)$. С другой стороны, $C \subset X \setminus \{x_j^i\}$. Тогда $f(C) \subset f(X \setminus \{x_j^i\}) = X \setminus \{x_{j_1}^{i_1}\}$. Таким образом, $x_{j_1}^{i_1} \notin f(C) = C$. В силу произвольности точки $x_{j_1}^{i_1} \in B = a_1 \cup \ldots \cup a_k$ и уже проверенного включения $\psi_X(A) \subset B$ получаем, что множество $C = \psi_X(A)$ пусто. Противоречие.

Пусть теперь $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ произвольно и $x \notin \psi_X(A)$ для некоторого $X \in B$. Вложим X в гильбертов кирпич Q. Тогда, как было отмечено в конце пункта 1°, $\psi_X(A) = \psi_Q(A)$. Возьмем непересекающиеся окрестности O_1 и O_2 множества $\psi_Q(A)$ и точки x в Q соответственно. Из непрерывности отображения ψ_Q вытекает существование такой окрестности $OA \subset \exp^2 Q$, что для всякого $A' \in OA$ имеем $\psi_Q(A') \subset O_1$. В окрестности OA найдется такое $A_0 = \{a_1^0, \ldots, a_k^0\}$, что a_i^0 попарно не пересекаются и состоят из одинакового числа элементов. При этом можно предполагать, что $B_0 = \{a_1^0 \cup \ldots \cup a_k^0\}$ содержится в сколь угодно тесной окрестности множества B и $B_0 \cap O_2 \neq \varnothing$. Тогда по доказанному выше $\psi_{B_0}(A_0) = B_0$. Но $\psi_{B_0}(A_0) = \psi_Q(A_0)$. Итак, $B_0 = \psi_Q(A_0) \subset O_1$, но это противоречит тому, что $B_0 \cap O_2 \neq \varnothing$ и $O_1 \cap O_2 = \varnothing$. Теорема 5.26 доказана.

Глава VIII

ПРОСТРАНСТВА ДУГУНДЖИ И ПРОСТРАНСТВА МИЛЮТИНА

§ 1. Теорема Хана–Банаха и тензорное произведение мер

1.1. Всюду в этой главе предполагаем, что поле скаляров — это поле действительных чисел. Комплексификация излагаемой ниже теории не приводит к более глубоким результатам. Все рассматриваемые в этой главе пространства X, Y — бикомпакты.

Напомним, что нормированные линейные пространства были определены в гл. V, § 1.

1.2. Линейное отображение $u\colon L_1 \to L_2$ нормированных линейных пространств называется *ограниченным*, если $\sup\{\|u(x)\|\colon \|x\| \leqslant 1\} < \infty$. Число $\sup\{\|u(x)\|\colon \|x\| \leqslant 1\}$ называется *нормой* отображения u и обозначается $\|u\|$. Для ограниченного отображения u имеем $\|u(x)\| \leqslant \|u\| \cdot \|x\|$. В самом деле, согласно 2) из V.1.2 для $x \neq 0$ имеем

$$\|u(x)\| = \left\|u\left(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|x\| \cdot \left\|u\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \|x\| \cdot \|u\|.$$

1.3. Предложение. *Линейное отображение $u\colon L_1 \to L_2$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено.*

Доказательство. Если u непрерывно в нуле, то существует такое $\delta > 0$, что $\|u(y)\| < 1$ при $\|y\| < \delta$. Тогда при $x \neq 0$, $\|x\| \leqslant 1$ имеем $\|\frac{\delta}{2}x\| < \delta$ и, значит, $\|u(x)\| = \frac{2}{\delta}\|u\left(\frac{\delta}{2}x\right)\| < \frac{2}{\delta}$. Следовательно, $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|u(x)\| \leqslant \frac{2}{\delta} < \infty$. Если же отображение u ограничено, то из неравенства $\|u(x)\| \leqslant \|u\| \cdot \|x\|$ вытекает его непрерывность в нуле и, следовательно, всюду.

1.4. Линейное отображение $\mu: L \to \mathbb{R}$ называется *функционалом.*

1.5. Теорема Хана–Банаха. *Пусть L — линейное нормированное пространство и L_1 — его подпространство. Тогда всякий непрерывный функционал $\mu_1: L_1 \to \mathbb{R}$ может быть продолжен до непрерывного функционала $\mu: L \to \mathbb{R}$ так, что $\|\mu\| = \|\mu_1\|$.*

Доказательство. Рассмотрим множество всех функционалов $\mu': L' \to \mathbb{R}$ $(L' \subset L)$, являющихся продолжениями функционала μ_1 с $\|\mu'\| = \|\mu_1\|$. Отношение $\mu'' \geqslant \mu'$, означающее, что μ'' — продолжение μ', превращает это множество в частично упорядоченное, все цепи которого ограничены. По лемме Цорна существует максимальное продолжение $\mu_0: L_0 \to \mathbb{R}$ функционала μ_1 с $\|\mu_0\| = \|\mu_1\|$. Осталось показать, что $L_0 = L$. Пусть существует элемент $y_1 \in L \setminus L_0$. Рассмотрим линейную оболочку $L'_0 = L(L_0, y_1)$. Определим продолжение $\mu'_0: L'_0 \to \mathbb{R}$ функционала μ_0. Для этого достаточно определить число $\mu'_0(y_1)$. Его подберем так, чтобы $\|\mu'_0\| = \|\mu_0\|$. Покажем, что это возможно.

Пусть $x, y \in L_0$. Тогда $\mu_0(y) - \mu_0(x) = \mu_0(y - x) \leqslant \|\mu_0(y - x)\| \leqslant \|\mu_0\| \cdot \|y - x\| \leqslant \|\mu_0\| \cdot \|y + y_1\| + \|\mu_0\| \cdot \| - y_1 - x\|$ и, значит, $-\|\mu_0\| \cdot \| - y_1 - x\| - \mu_0(x) \leqslant \|\mu_0\| \cdot \|y + y_1\| - \mu_0(y)$.

Левая часть этого неравенства не зависит от y, а правая — от x. Поэтому существует такое не зависящее ни от x, ни от y число c, что:

$$\text{(I)} \quad - \|\mu_0\| - y_1 - x\| - \mu_0(x) \leqslant c,$$

$$\text{(II)} \quad c \leqslant \|y + y_1\| \cdot \|\mu_0\| - \mu_0(y).$$

Положим $\mu'_0(y_1) = c$. Тогда для $y + \alpha y_1 \in L'_0$ имеем

$$\mu'_0(y + \alpha y_1) = \mu_0(y) + \alpha c \leqslant \|\mu_0\| \cdot \|y + \alpha y_1\|$$

в силу неравенства (I) при $\alpha < 0$ и (II) при $\alpha > 0$. Теорема доказана.

1.6. Тензорное произведение мер. Для непрерывного отображения $f: X \to Y$ через $f^*: C(Y) \to C(X)$ обозначается двойственное отображение, определяемое равенством $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$.

1.7. Теорема. *Пусть $\mu_\alpha \in P(X_\alpha)$, $\alpha \in A$. Тогда существует единственная мера $\bigotimes\limits_{\alpha\in A} \mu_\alpha \in P(\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha)$, удовлетворяющая теореме Фубини, т.е. такая мера, что для любого конечного $B \subset A$ и любых $\varphi_\alpha \in C(X_\alpha)$, $\alpha \in B$ выполнено равенство*

$$(*)\qquad \left(\bigotimes_{\alpha\in A} \mu_\alpha\right)\left(\mathop{\times}_{\alpha\in B} p^*_\alpha(\varphi_\alpha)\right) = \mathop{\times}_{\alpha\in B} \mu_\alpha(\varphi_\alpha).$$

Доказательство. Равенство (*) определяет функционал $\bigotimes\limits_{\alpha\in A} \mu_\alpha$ на множестве функций, которое по теореме Вейерштрасса–Стоуна всюду плотно в $C(\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha)$. Отсюда вытекает единственность $\bigotimes\limits_{\alpha\in A} \mu_\alpha$. Предположим теперь, что доказано

Утверждение $\otimes$. Для любых мер $\mu \in P(X)$ и $\nu \in P(Y)$ существует мера $\mu\otimes\nu \in P(X\times Y)$, удовлетворяющая теореме Фубини.

Утверждение $\otimes$ индукцией распространяется на любое конечное число сомножителей. Следовательно, функционал $\bigotimes\limits_{\alpha\in A} \mu_\alpha$ уже определен на линейных комбинациях функций, зависящих от конечного числа координат (заметим, что его норма на этом подпространстве равна 1), и по теореме Хана–Банаха продолжается на непрерывные функции. Это продолжение вероятностно в силу VII.3.2.

Теперь докажем утверждение $\otimes$. Сначала по теореме Хана–Банаха продолжим μ и ν на банаховы пространства $B(X)$ и $B(Y)$ всех ограниченных функций с нормой $\sup|\varphi|$. Назовем функцию ψ на $X\times Y$ ступенчатой, если существуют такие конечные разбиения (дизъюнктные покрытия) $\{A_i\}$ и $\{B_j\}$ множеств X и Y, что $\psi = \sum r_{ij}\chi_{A_i\times B_j}$, где χ_Z — характеристическая функция множества Z. Линейная комбинация ступенчатых функций — функция ступенчатая. Для ступенчатой функции $\psi = \sum r_{ij}\chi_{A_i\times B_j}$ положим $(\mu\otimes\nu)(\psi) = \sum r_{ij}\mu(\chi_{A_i})\nu(\chi_{B_j})$. Покажем, что норма так определенного функционала $\leqslant 2$ и он удовлетворяет теореме Фубини. Для неотрицательной функции $\psi = \sum r_{ij}\chi_{A_i\times B_j}$ имеем

$$|(\mu\otimes\nu)(\psi)| = |\sum r_{ij}\mu(\chi_{A_i})\nu(\chi_{B_j})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i |\mu(\chi_{A_i})| \cdot \sum_j r_{ij} \cdot |\nu(\chi_{B_j})| \leqslant \sum_i r_i |\mu(\chi_{A_i}) \leqslant r = \|\psi\|$$

(здесь $r_i = \max\limits_j r_{ij}$, $r = \max\limits_i r_i$, и последние неравенства справедливы, поскольку нормы μ и ν равны 1). Значит, для любой функции ψ имеем $|(\mu\otimes\nu)(\psi)| = |(\mu\otimes\nu)(\psi^+ - \psi^-)| \leqslant |(\mu\otimes\nu)(\psi^+)| + |(\mu\otimes\nu)(\psi^-)| \leqslant 2\|\psi\|$. Если $\psi = \varphi_1 \cdot \varphi_2$, где каждая из функций φ_1 и φ_2 зависит только от одной координаты, то ψ можно представить в виде $\sum r_{ij}\chi_{A_i\times B_j}$, где $r_{ij} = r_i \cdot r_j$, откуда и получаем, что $\mu\otimes\nu$ удовлетворяет теореме Фубини.

По теореме Хана–Банаха продолжаем $\mu\otimes\nu$ на замыкание в $B(X\times Y)$ подпространства L ступенчатых функций. Это продолжение, очевидно, удовлетворяет теореме Фубини. Рассмотрим теперь $\mu\otimes\nu$ на пространстве $C(X\times Y)$, которое, очевидно, лежит в $[L]$.

Поскольку всякая неотрицательная непрерывная функция ψ на $X\times Y$ с любой степенью точности представляется в виде суммы неотрицательных функций $\varphi_1^i\cdot\varphi_2^i$, где каждая из функций φ_1^i и φ_2^i зависит лишь от одной координаты, то из теоремы Фубини вытекает положительность функционала $\mu\otimes\nu$. Значит, в силу VII.3.2 $\|\mu\otimes\nu\| = 1$. Теорема доказана.

§ 2. Регулярные операторы

2.1. Линейный оператор $u\colon C(X)\to C(Y)$ называется *регулярным*, если $|u| = 1$, и $u(1_X) = 1_Y$.

Для всякого линейного оператора $u\colon C(X)\to C(Y)$ равенство $(u^*(\mu))(\varphi) = \mu(u(\varphi))$ определяет двойственное отображение $u^* = M(Y)\to M(X)$, которое непрерывно в слабой топологии.

2.2. Предложение. *Для линейного оператора u: $C(X)\to C(Y)$ следующие условия эквивалентны:*

а) *u — регулярный оператор;*

б) *$u(1_X) = 1_Y$ и $u(\varphi)\geqslant 0$ для всякой $\varphi\geqslant 0$;*

в) *u^* изометрично отображает положительный конус пространства $M(Y)$ в положительный конус пространства $M(X)$;*

г) *для всякого $y\in Y$ мера $\mu_y = u^*(\delta_y)$ вероятностна.*

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Пусть $\varphi \geqslant 0$ и $\varphi \neq 0$. Для ε с $(1/\|\varphi\|) \geqslant \varepsilon > 0$ имеем $\|1_X - \varepsilon\varphi\| \leqslant 1$. Поскольку u регулярен, $\|u(1_X - \varepsilon\varphi)\| \leqslant 1$, значит, $\|1_Y - \varepsilon u(\varphi)\| \leqslant 1$. Следовательно, $u(\varphi) \geqslant 0$.

б) $\Rightarrow$ в). Пусть $\mu \in M(Y)$ и $\mu \geqslant 0$. Тогда для $\varphi \in C(X), \varphi \geqslant \geqslant 0$, имеем $(u^*(\mu))(\varphi) = \mu(u(\varphi)) \geqslant 0$, так как $u(\varphi) \geqslant 0$. Далее, $\|u^*(\mu)\| = (u^*(\mu))(1_X) = \mu(u(1_X)) = \mu(1_Y) = \|\mu\|$.

в) $\Rightarrow$ г). Тривиально. Заметим при этом, что $\mu_y(\varphi) = (u^*(\delta_y))(\varphi) = \delta_y(u(\varphi)) = u(\varphi)(y)$.

г) $\Rightarrow$ а). В силу только что сделанного замечания, $u(1_X)(y) = \mu_y(1_X) = \|\mu_y\| = 1$, значит, $u(1_X) = 1_Y$ и $\|u\| \geqslant 1$. Далее, $\|u\| = \sup\{\|u(\varphi)\| \colon \|\varphi\| = 1\} = \sup\{\sup\{|\mu_y(\varphi)| \colon y \in Y\} \colon \|\varphi\| = 1\} \leqslant \sup\{\|\mu_y\| \colon y \in Y\} = 1$. Предложение доказано.

2.3. Теорема. *Пусть $u_\alpha \colon C(X_\alpha) \to C(Y_\alpha)$, $\alpha \in A$, — регулярные операторы. Существует единственный регулярный оператор*

$$u = \bigotimes_\alpha u_\alpha \colon C(\prod_\alpha X_\alpha) \to C(\prod_\alpha Y_\alpha),$$

такой, что для любого конечного $B \subset A$ имеет место равенство

$$u(\bigotimes_{\alpha \in B} p_\alpha^*(\varphi_\alpha)) = \mathop{\times}_{\alpha \in B} q_\alpha^* u_\alpha(\varphi_\alpha), \tag{1}$$

где p_α, q_α — проектирования произведений $\prod X_\beta$ и $\prod Y_\beta$ на сомножители.

Доказательство. Из равенств (1) и теоремы Вейерштрасса–Стоуна вытекает единственность оператора u.

По условию г) предложения 2.2 для каждого $y_\alpha \in Y_\alpha$ имеется вероятностная мера $\mu_{y_\alpha} \in P(X_\alpha)$ такая, что $u_\alpha(\varphi)(y_\alpha) = \mu_{y_\alpha}(\varphi)$ для $\varphi \in C(X_\alpha)$. Для $(y_\alpha) \in \prod Y_\alpha$ положим $\mu_{(y_\alpha)} = \bigotimes_\alpha \mu_{y_\alpha}$. В силу теоремы 1.6 $\mu_{(y_\alpha)}$ есть вероятностная мера на $\prod X_\alpha$. Положим

$$u(\varphi)((y_\alpha)) = \mu_{(y_\alpha)}(\varphi). \tag{2}$$

Определен линейный оператор $u \colon C(\prod X_\alpha) \to B(\prod Y_\alpha)$. Имеем $\|u\| = \sup \|\mu_{(y_\alpha)}\| = 1$. Из теоремы Фубини следует, что u удовлетворяет равенству (1). В частности, $u(\varphi) \in C(\prod Y_\alpha)$ для каждой функции φ вида

$$\varphi = \bigotimes_{\alpha \in B} p_\alpha^*(\varphi_\alpha), \quad B \subset A \text{ конечно.} \tag{3}$$

Обозначим C_0 линейную оболочку функций вида (3). Имеем $u(C_0) \subset C(\prod Y_\alpha)$. По теореме Вейерштрасса–Стоуна C_0 всюду плотно в $C(\prod X_\alpha)$. Поэтому из непрерывности u получаем

$$u(C(\prod X_\alpha)) = u[C_0] \subset [u(C_0)]_{B(\prod Y_\alpha)} \subset$$
$$\subset [C(\prod Y_\alpha)]_{B(\prod Y_\alpha)} = C(\prod Y_\alpha).$$

Поскольку $\mu_{(y_\alpha)}$ — вероятностная мера, равенство (2) дает условие б) предложения 2.2. Значит, оператор u регулярен. Теорема доказана.

2.4. Ненулевой оператор $u\colon C(X) \to C(Y)$ называется *мультипликативным*, если $u(\varphi \cdot \psi) = u(\varphi) \cdot u(\psi)$. Таким образом, мультипликативные операторы — это нетривиальные гомоморфизмы кольца $C(X)$ в кольцо $C(Y)$.

2.5. Предложение. *Всякий мультипликативный оператор $U\colon C(X) \to C(Y)$ регулярен.*

Доказательство. Ясно, что оператор u положителен, т. е. переводит неотрицательные функции в неотрицательные. Далее, $u(1_X) = u(1_X \cdot 1_X) = u(1_X) \cdot u(1_X)$, т. е. $u(1_X) = 1_Y$. Поэтому, как и для всякого положительного оператора (см. VII.3.2), имеем $\|u\| = \|u(1_X)\| = 1$. Предложение доказано.

Всякий оператор вида $f^*\colon C(Y) \to C(X)$, где $f\colon X \to Y$, — непрерывное отображение, очевидно, мультипликативен. И наоборот.

2.6. Теорема. *Для всякого мультипликативного оператора $u\colon C(Y) \to C(X)$ существует единственное непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, такое, что $u = f^*$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Рассмотрим функционал $t_x\colon C(Y) \to \mathbb{R}$, определяемый равенством $t_x(\varphi) = u(\varphi)(x)$. Он мультипликативен, поскольку мультипликативен оператор u. Далее, $t_x(r_Y) = r$ для всякого $r \in \mathbb{R}$.

Пусть $\operatorname{Ker} t_x = \{\varphi \in C(Y)\colon t_x(\varphi) = 0\}$. Положим $\mathscr{F}_x = \{\varphi^{-1}0\colon \varphi \in \operatorname{Ker} t_x\}$. Семейство $\mathscr{F}_x$ состоит из непустых замкнутых подмножеств Y. В самом деле, если бы $\operatorname{Ker} t_x$ принадлежала функция φ, всюду отличная от нуля, то $t_x(1_Y) = t_x(\varphi \cdot (1/\varphi)) = t_x(\varphi) \cdot t_x(1/\varphi) = 0$. Далее, семейство $\mathscr{F}_x$ центрировано: $\varphi_1^{-1}(0) \cap \ldots \cap \varphi_k^{-1}(0) = (\varphi_1^2 + \ldots + \varphi_k^2)^{-1}(0)$

($\varphi_1^2 + \ldots + \varphi_k^2 \in \operatorname{Ker} t_x$ в силу мультипликативности t_x). Таким образом, пересечение $\cap\mathscr{F}_x$ непусто.

Предположим, что существуют две различные точки $y_1, y_2 \in \in \cap\mathscr{F}_x$. В силу леммы Урысона существуют такие функции $\varphi_1, \varphi_2 \in C(Y)$, что $\varphi_i(y_i) = 0$ и $\varphi_1 + \varphi_2 = 1_Y$. Одна из этих функций, допустим φ_2, не принадлежит $\operatorname{Ker} t_x$. Тогда $\psi = \varphi_1 - - t_x(\varphi_1) \cdot \frac{\varphi_2}{t_x(\varphi_2)}$ принадлежит $\operatorname{Ker} t_x$. В то же время $\psi(y_2) = = \varphi_1(y_2) = 1$. Значит, $y_2 \notin \cap\mathscr{F}_x$. Итак, пересечение $\cap\mathscr{F}_x$ состоит из одной точки, которую и обозначим $f(x)$.

Отображение $f\colon X \to Y$ определено. Проверим, что $\varphi \circ f = = u(\varphi)$ для любой функции $\varphi \in C(Y)$. В силу равенства $t_x(\varphi) = = u(\varphi)(x)$(см. определение t_x) для этого достаточно показать, что $\varphi(f(x)) = t_x(\varphi)$. Если $t_x(\varphi) = r$, то $\psi = \varphi - r_Y \in \operatorname{Ker} t_x$ и, значит, $\varphi(f(x)) = 0$, т. е. $\varphi(f(x)) = r = t_x(\varphi)$.

Таким образом, $\varphi \circ f = u(\varphi)$, т. е. $u = f^*$. В силу полной регулярности пространства Y отображение f непрерывно, поскольку непрерывны все функции $\varphi \circ f$, где $\varphi \in C(Y)$. Наконец, единственность. Если $f_1 \neq f_2$, то $f_1^* \neq f_2^*$. В самом деле, пусть $f_1(x) \neq f_2(x)$. Возьмем такую функцию $\varphi \in C(Y)$, что $\varphi(f_1(x)) \neq \neq \varphi(f_2(x))$. Тогда $f_1^*(\varphi)(x) = \varphi(f_1(x)) \neq \varphi(f_2(x)) = f_2^*(\varphi)(x)$. Теорема доказана.

§ 3. Операторы продолжения и усреднения

3.1. Регулярный оператор $u\colon C(X) \to C(Y)$ называется *регулярным опусом* для отображения $f\colon X \to Y$, если $f^* \circ u \circ f^* = = f^*$.

Если при этом f — вложение, то u называется *регулярным оператором продолжения*. Если же f — эпиморфизм, то u называется *регулярным оператором усреднения*. Если u — опус для отображения $f\colon X \to Y$ и $y \in f(X)$, то для всякой функции $\psi \in C(Y)$ имеем

$$u \circ f^*(\psi)(y) = \psi(y). \tag{1}$$

В самом деле, если $x \in f^{-1}y$, то $u \circ f^*(\psi)(y) = f^* \circ u \circ f^*(\psi)(x) = = f^*(\psi)(x) = \psi(f(x)) = \psi(y)$.

3.2. Предложение. *Пусть дано отображение $f\colon X \to \to Y$. Регулярный оператор $u\colon C(X) \to C(Y)$ является регу-*

лярным оператором продолжения (соответственно усреднения) тогда и только тогда, когда $f^* \circ u = \mathrm{id}_{C(X)}$ (соответственно $u \circ f^* = \mathrm{id}_{C(Y)}$).

Доказательство. Пусть u — регулярный оператор продолжения. Тогда $f^*\colon C(Y) \to C(X)$ есть эпиморфизм согласно теореме о продолжении. Поэтому из равенства $f^* \circ u \circ f^* = f^*$ вытекает $f^* \circ u = \mathrm{id}_{C(X)}$ (во всяком равенстве возможно сокращение на эпиморфизм справа). Аналогично, сокращая на мономорфизм слева, получаем $u \circ f^* = \mathrm{id}_{C(Y)}$ для оператора усреднения.

Пусть теперь u — регулярный оператор и $f^* \circ u = \mathrm{id}_{C(X)}$. Покажем, что $f\colon X \to Y$ — вложение. Предположим, что $f(x_1) = f(x_2)$. Рассмотрим такую функцию $\varphi \in C(X)$, что $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Тогда $\varphi = f^* \circ u(\varphi)$. Но всякая функция вида $f^*(\psi)$ принимает одинаковые значения в точках x_1 и x_2. Противоречие. Аналогично получим противоречие в случае $u \circ f^* = \mathrm{id}_{C(Y)}$, рассмотрев два различных продолжения функции $\varphi\colon f(X) \to \mathbb{R}$ на Y. Предложение доказано.

3.3. Следствие. *Эпиморфизм $f\colon X \to Y$ допускает регулярный оператор усреднения тогда и только тогда, когда существует проекция с нормой 1 из $C(X)$ на подпространство $f^*(C(Y))$, изометричное $C(Y)$.*

Проекция v определяется равенством $v = f^* \circ u$. Оператор усреднения u определяется равенством $u = w \circ v$, где $w\colon f^*C(Y) \to C(Y)$ — изометрия, обратная отображению f^*.

3.4. Следствие. *Если $u\colon C(X) \to C(Y)$ — регулярный оператор продолжения для $f\colon X \to Y$, то u — линейная изометрия пространства $C(X)$ на дополняемое подпространство в $C(Y)$.*

Дополнение к $u(C(X))$ состоит из функций, обращающихся в 0 на $f(X)$.

3.5. Предложение. *Пусть u — опус для отображения $f\colon X \to Y$ и Y_1 — замкнутое подмножество Y, содержащее $f(X)$. Тогда $i_1^* \circ u$ — опус для отображения $f_1\colon X \to Y_1$ (здесь $i_1\colon Y_1 \to Y$ — вложение, а $f_1(x) = f(x)$ для всякой точки $x \in X$, т. е. $f_1 = i_1^{-1} \circ f$).*

Доказательство. Поскольку $i_1 \circ f_1 = f$, то $f_1^* \circ (i_1^* \circ u) \circ$ $\circ f_1 = (i_1 \circ f_1)^* \circ u \circ f_1^* = f^* \circ u \circ f_1^*$. Далее, для $\psi_1 \in C(Y_1)$ существует $\psi \in C(Y)$ такое, что $i_1^*(\psi) = \psi_1$. Значит, $f_1^*(\psi_1) =$ $= f^*(\psi)$. Поэтому $f_1^* \circ (i_1^* \circ u) \circ f_1^*(\psi_1) = f^* \circ u \circ f_1^*(\psi_1) = f^* \circ u \circ$ $\circ f^*(\psi) = f^*(\psi) = f_1^*(\psi_1)$. Предложение доказано.

3.6. Вложение $f\colon X \to Y$ называется *коретракцией*, если существует ретракция $r\colon Y \to X$.

3.7. Предложение. *Отображение $f\colon X \to Y$ является коретракцией тогда и только тогда, когда существует мультипликативный оператор продолжения для f.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $r\colon Y \to X$ — ретракция. Тогда $u = r^*$ — мультипликативный оператор продолжения для f. Теперь достаточность. Пусть u — мультипликативный оператор продолжения для $f\colon X \to Y$. Согласно 2.6 существует такое отображение $r\colon Y \to X$, что $u = r^*$. Поскольку u — оператор продолжения, имеем $f^* \circ u = \mathrm{id}_{C(X)}$, т. е. $f^* \circ r^* =$ $= \mathrm{id}_{C(X)}$. Значит, $(r \circ f)^* = (\mathrm{id}_X)^*$, откуда $r \circ f = \mathrm{id}_X$. Предложение доказано.

3.8. Предложение. *Отображение $f\colon X \to Y$ является ретракцией тогда и только тогда, когда существует мультипликативный оператор усреднения для f.*

Доказательство аналогично предыдущему.

3.9. Предложение. *Пусть u — регулярный опус для отображения $f\colon X \to Y$ и $y \in f(X)$. Предположим, что функция $\varphi \in C(X)$ постоянна на $f^{-1}y$. Тогда $u(\varphi)(y) = \varphi(x)$, где $x \in f^{-1}y$.*

Доказательство. В силу линейности и регулярности опуса u достаточно рассмотреть случай $\varphi(f^{-1}y) = 0$. Далее, поскольку $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, можно ограничиться случаем $\varphi \geqslant 0$. Пусть $0 < \varepsilon < \|\varphi\|$. Существует такая окрестность $Of^{-1}y$, что $\varphi(x) < \varepsilon$ для всякой точки $x \in Of^{-1}y$. В этой окрестности в силу замкнутости отображения f содержится окрестность вида $f^{-1}Oy$. Существует такая функция $\psi \in C(Y)$, что $\psi(X \setminus Oy) =$ $= \|\varphi\|, \psi(y) = \varepsilon$ и $\varepsilon \leqslant \psi \leqslant \|\varphi\|$. Тогда $f^*(\psi) \geqslant \varphi$. По свойству б) из 2.2 имеем $u \circ f^*(\psi) \geqslant u(\varphi)$. С другой стороны, согласно (1) из 3.1 имеем $u \circ f^*(\psi)(y) = \psi(y) = \varepsilon$. Значит, $u(\varphi)(y) \leqslant \varepsilon$ и (ввиду произвольности ε) $u(\varphi)(y) = 0$. Предложение доказано.

3.10. Предложение. *Пусть u_1 и u_2 — регулярные опусы для отображений $f_1: X \to Y$ и $f_2: Y \to Z$, и пусть $f_1(X) = f_2^{-1} Z_0$ для некоторого $Z_0 \subset Z$. Тогда оператор $v = u_2 \circ u_1$ — регулярный опус для отображения $g = f_2 \circ f_1$.*

Доказательство. Надо проверить, что $g^* \circ v \circ g^*(\psi) = g^*(\psi)$ для $\psi \in C(Z)$. Пусть $z \in g(X)$, $y \in f_2^{-1}(z)$, $x \in f_1^{-1}(y)$ и $\varphi = g^*(\psi)$. Имеем $u_1(\varphi)(y) = u_1(\varphi)(f_1(x)) = f_1^* \circ u_1(\varphi)(x) = f_1^* \circ u_1 \circ g^*(\psi)(x) = f_1^* \circ u_1 \circ f_1^* \circ f_2^*(\psi)(x) = f_1^* \circ f_2^*(\psi)(x) = f_2^*(\psi)(f_1(x)) = \psi \circ f_2 \circ f_1(x) = \psi(z)$. Поскольку $f_2^{-1}(z) \subset f_1(X)$, функция $u_1(\varphi)$ постоянна на множестве $f_2^{-1}(z)$. Согласно 3.9 имеем $u_2 \circ u_1(\varphi)(z) = u_1(\varphi)(y) = \psi(z)$. Итак, для всякой точки $z \in g(X)$ имеем $v \circ g^*(\psi)(z) = \psi(z)$, откуда $g^* \circ v \circ g^*(\psi) = g^*(\psi)$. Наконец, оператор v регулярен как композиция регулярных операторов. Предложение доказано.

3.11. Предложение. *Пусть диаграмма*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
X_0 \arrow[u, "g_1"] \arrow[r, "f_0"] & Y_0 \arrow[u, "g_2"']
\end{tikzcd}
$$

коммутативна, причем g_i — вложение, f — эпиморфизм и $g_1(X_0) = f^{-1} g_2(Y_0)$. Тогда: а) если существует регулярный опус v для f, то существует регулярный опус v_0 для f_0; б) если, кроме того, существует регулярный опус u_1 для g_1, то существует и регулярный опус u_2 для g_2.

Доказательство. а) Пусть $\varphi \in C(X_0)$. Возьмем произвольное продолжение $\psi \in C(X)$ функции φ и положим $v_0(\varphi) = g_2 \circ v(\psi)$. Проверим сначала, что функция $v_0(\varphi)$ не зависит от выбора продолжения ψ. Пусть ψ' — любое другое продолжение функции φ и $y \in Y_0$. Тогда $(\psi - \psi')(f^{-1}y) = 0$ и, значит, согласно 3.9 имеем $v(\psi - \psi')(y) = 0$, т. е. $v(\psi)(y) = v(\psi')(y)$ и $g_2^* \circ v(\psi)(y) = g_2 \circ v(\psi')(y)$.

Из корректности определения оператора v_0 вытекает и его линейность. Далее, оператор v_0 положителен и $v_0(1_{X_0}) = 1_{Y_0}$. Значит, v_0 регулярен согласно 2.2. Пусть теперь $\varphi \in C(Y_0)$ и $\psi \in$

$\in C(Y)$ — произвольное продолжение φ. Тогда функция $f^*(\psi)$ является продолжением $f_0^*(\varphi)$ и $v \circ f^*(\psi) = \psi$ в силу 3.2. Тогда $v_0 \circ f_0^*(\varphi) = g_2^* \circ v \circ f^*(\psi) = g_2^*(\psi) = \varphi$. Значит, v_0 — оператор усреднения согласно 3.2.

б) Положим $u_2 = v \circ u_1 \circ f_0^*$. Оператор u_2 регулярен как композиция регулярных операторов. Далее, поскольку u_1 есть оператор продолжения, то из определения оператора v_0 вытекает равенство $v_0 = g_2^* \circ v \circ u_1$. Поэтому

$$g_2^* \circ u_2 \circ g_2^* = g_2^* \circ v \circ u_1 \circ f_0^* \circ g_2^* = v_0 \circ f_0^* \circ g_2^* = g_2^*.$$

Предложение доказано.

3.12. Предложение. *Пусть дано семейство отображений $\{f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha, \alpha \in \mathrm{A}\}$, и пусть $u_\alpha\colon C(X_\alpha) \to C(Y_\alpha)$ — регулярный опус для f_α. Тогда $u = \bigotimes\limits_\alpha u_\alpha$ есть регулярный опус для*

$$f = \prod_\alpha f_\alpha\colon \prod_\alpha X_\alpha \to \prod_\alpha Y_\alpha.$$

Доказательство. Оператор u регулярен по теореме 2.3 и, значит, непрерывен. В силу линейности и непрерывности операторов $f^* \circ u \circ f^*$ и f^* равенство

$$f^* \circ u \circ f^*(\psi) = f^*(\psi)$$

достаточно проверить для функций ψ, принадлежащих такому множеству $G \subset C(Y)$, линейная оболочка $L(G)$ которого плотна в $C(Y)$. Пусть $G = \{\times_{\alpha\in B} q_\alpha^*(\psi_\alpha)\colon \psi_\alpha \in$ $\in C(Y_\alpha), B$ — конечное подмножество $A\}$. Пользуясь мультипликативностью f^*, равенством $q_\alpha \circ f = f_\alpha \circ p_\alpha$ и определением тензорного произведения $u = \otimes u_\alpha$, для $\psi = \times_{\alpha\in B} q_\alpha^*(\psi_\alpha)$ получаем

$$\begin{aligned} f^* \circ u \circ f^*(\psi) &= f^* \circ u(\times_{\alpha\in B} f^* \circ q_\alpha^*(\psi_\alpha)) = \\ &= f^* \circ u(\times_{\alpha\in B} p_\alpha^* \circ f_\alpha^*(\psi_\alpha)) = f^*(\times_{\alpha\in B} q_\alpha^* \circ u_\alpha \circ f_\alpha^*(\psi_\alpha)) = \\ &= \times_{\alpha\in B} f^* \circ q_\alpha^* \circ u_\alpha \circ f_\alpha^*(\psi_\alpha) = \times_{\alpha\in B} p_\alpha^* \circ f_\alpha^* \circ u_\alpha \circ f_\alpha^*(\psi_\alpha) = \\ &= \times_{\alpha\in B} p_\alpha^* \circ f_\alpha^*(\psi_\alpha) = \times_{\alpha\in B} f^* \circ q_\alpha^*(\psi_\alpha) = \\ &= f^*(\times_{\alpha\in B} q_\alpha^*(\psi_\alpha)) = f^*(\psi). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

§ 4. Пространства Милютина

4.1. Интегрирование ограниченных на отрезке функций со счетным числом точек разрыва. *Разбиением* p отрезка $I = [0,1]$ назовем любую дизъюнктную систему интервалов $\{U_\alpha\}$ такую, что множество $C(p) = I \setminus \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ не более чем счетно.

Пусть φ — ограниченная на отрезке функция с не более чем счетным числом точек разрыва. Определены два числа $p^+(\varphi) = \sum\{\mu(U_\alpha) \times \sup\limits_{x \in U_\alpha} \varphi(x) \colon U_\alpha \in p\}$ и $p^-(\varphi) = \sum\{\mu(U_\alpha) \times \inf\limits_{x \in U_\alpha} \varphi(x) \colon U_\alpha \in p\}$, где $\mu(U_\alpha)$ — длина интервала U_α.

Лемма. *Для любого разбиения p и всякого $\varepsilon > 0$ существует такое вписанное в p разбиение p_0, что $p_0^+(\varphi) - p_0^-(\varphi) < \varepsilon$.*

Доказательство. Обозначим $d(\varphi)$ множество точек разрыва функции φ. Для всякой точки $x \in I \setminus C(p) \cup d(\varphi)$ возьмем интервал $Ox \subset I \setminus C(p)$, колебание функции φ в котором меньше ε. Совокупность ω этих интервалов вписана в разбиение p и покрывает весь отрезок за исключением некоторого не более чем счетного множества $C \subset C(p) \cup d(\varphi)$. Впишем в ω какое-нибудь разбиение p_0. Оно и будет, как легко видеть, искомым. Лемма доказана.

Множество $\mathscr{P}$ всех разбиений отрезка направлено отношением вписанности. Очевидно, что для $p_2 \succ p_1$ имеем $p_2^+(\varphi) \leqslant p_1^+(\varphi)$ и $p_2^-(\varphi) \geqslant p_1^-(\varphi)$. Поэтому существуют пределы $\int^+ \varphi = \lim\limits_{p \in \mathscr{P}} p^+(\varphi)$ и $\int^- \varphi = \lim\limits_{p \in \mathscr{P}} p^-(\varphi)$ (число a называется пределом функции ψ по направленному множеству B, если для всякого $\beta \in B$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\beta_1 \in B, \beta_1 \geqslant \beta$, что $a - \varepsilon < \psi(\beta') < a + \varepsilon$ для всех $\beta' \geqslant \beta_1$). Из леммы вытекает, что $\int^+ \varphi = \int^- \varphi = \int \varphi$. Это число и называем интегралом функции φ.

Свойства интеграла $\int \varphi$.

1. Линейность. Из леммы вытекает, что интеграл $\int \varphi$ аппроксимируется интегральными суммами вида $p_\xi(\varphi) = \sum\{\mu(U_\alpha)\varphi(\xi(U_\alpha)) \colon U_\alpha \in p\}$, где ξ — функция выбора. Отсюда и следует линейность.

2. Для характеристической функции χ_U интервала U имеем

$$\int \chi_U = \mu(U).$$

3. $|\int \varphi| \leqslant \|\varphi\|$.
4. $\varphi \geqslant 0 \Rightarrow \int \varphi \geqslant 0$.

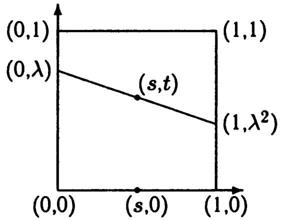
4.2. Лемма Милютина. *Существует эпиморфизм канторова дисконтинуума $\prod$ на отрезок I, допускающий регулярный оператор усреднения.*

Замечание. Легко убедиться (на примере характеристических функций), что стандартное отображение $h\colon \prod \to I$ не допускает регулярного оператора усреднения.

Доказательство леммы Милютина. Построим эпиморфизм $f\colon \prod \times \prod \to I$. Для канторовского отображения $h\colon \prod \to I$ определим «обратное» отображение $h_+^{-1}\colon I \to \prod$ равенством

$$h_+^{-1}(t) = \max\{x\colon h(x) = t\}.$$

Отображение h_+^{-1} имеет счетное число точек разрыва (двоично-рациональные точки интервала $(0; 1)$). Для функции $\varphi \in C(\prod \times \times \prod)$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ определим ограниченную функцию φ_λ на отрезке, имеющую не более чем счетное число точек разрыва. Положим $\varphi_\lambda(s) = \varphi(h_+^{-1}(s), h_+^{-1}(t))$, где t определяется из рисунка, т. е. $t = (\lambda^2 - \lambda)s + \lambda$.



Функция φ_λ ограничена и имеет счетное число точек разрыва. В самом деле, s может быть точкой разрыва, если по крайней мере одно из двух чисел s и t двоично-рационально. При фиксированном λ этому условию удовлетворяют двоично-рациональные s и $s = (t - \lambda)/(\lambda^2 - \lambda)$, где t — двоично-рационально. Теперь для $(x, y) \in \prod \times \prod$ положим $f(x, y) = \lambda$, где $(h(x), h(y)) \in \in [(0, \lambda); (1, \lambda^2)]$, т. е. $h(y) = (\lambda^2 - \lambda)h(x) + \lambda$ или $\lambda^2 h(x) + \lambda(1 -$

$- h(x)) - h(y) = 0$, откуда

$$\lambda = \begin{cases} \frac{h(x)-1+\sqrt{(h(x)-1)^2+4h(x)h(y)}}{2h(x)} & \text{при } x \neq 0; \\ h(y) & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Непрерывность функции f вытекает из непрерывности h и уравнения $h(y) = (\lambda^2 - \lambda)h(x) + \lambda$. Ясно также, что f — эпиморфизм.

Определим оператор $u\colon C(\prod \times \prod) \to C(I)$ равенством $u(\varphi)(\lambda) = \int \varphi_\lambda$.

По свойствам интеграла оператор u линеен, положителен, переводит $1_{\prod \times \prod}$ в 1_I (следовательно, $\|u\| = 1$) и действует из $C(\prod \times \prod)$ в $B(I)$. Далее, u есть оператор усреднения, поскольку функция $(f^*(\varphi))_\lambda$ постоянна на отрезке $[(0, \lambda); (1, \lambda^2)]$ и равна на нем $\varphi(\lambda)$. Поэтому $u \circ f^*(\varphi) = \varphi$.

Покажем, что u переводит непрерывные функции в непрерывные. Поскольку u — линейный непрерывный оператор, достаточно показать, что $u(\varphi) \in C(I)$ для каждой функции φ из некоторого множества G, линейная оболочка $L(G)$ которого плотна в $C(\prod \times \prod)$.

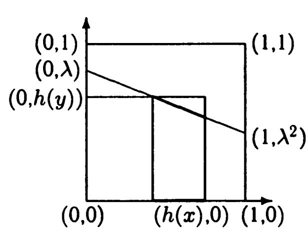
Для левых концов x и y смежных интервалов к канторову дисконтинууму $\prod$ положим

$$\psi_{(x,y)} = \chi\{(x', y') \in \prod \times \prod : x' \leqslant x, y' \leqslant y\} \text{ и } G = \{\psi_{(x,y)}\}.$$

Имеем

$$\psi_{(x_1,y_1)} \cdot \psi_{(x_2,y_2)} = \psi_{(\min\{x_1,x_2\},\min\{y_1,y_2\})}.$$

Поэтому $L(G)$ есть подкольцо, по теореме Вейерштрасса–Стоуна плотное в $C(\prod \times \prod)$. Из чертежа видно, что число $u(\psi_{(x,y)})(\lambda) = \int(\psi_{(x,y)})_\lambda$



равно длине ортогональной проекции пересечения отрезка $[(0, \lambda); (1, \lambda^2)]$ с прямоугольником $[(0, 0);\ (h(x), 0);\ (h(x), h(y));$

$(0, h(y))]$ на ось Ox. Поэтому

$$u(\psi_{(x,y)})(\lambda) = \begin{cases} h(x) & \text{для } 0 \leqslant \lambda \leqslant h(y); \\ h(x) - (\lambda - h(y))/(\lambda - \lambda^2) & \text{для } h(y) \leqslant \lambda \leqslant f(x,y); \\ f(x,y) & \text{для } f(x,y) \leqslant \lambda \leqslant 1. \end{cases}$$

На каждом из трех составляющих отрезков функция $u(\psi_{(x,y)})$ непрерывна. При $\lambda = f(x,y)$ имеем $h(x) - (\lambda - h(y))/(\lambda - \lambda^2) = 0$ (проверка с применением определения $f(x,y)$). Итак, u действует из $C(\prod \times \prod)$ в $C(I)$. Лемма Милютина доказана.

4.3. Эпиморфизм $f\colon X \to Y$ называется *милютинским*, если он допускает регулярный оператор усреднения. Бикомпакт X называется *пространством Милютина*, если существует милютинский эпиморфизм $f\colon D^\tau \to X$.

4.4. Предложение. *Если X — пространство Милютина веса τ, то существует милютинский эпиморфизм $f\colon D^\tau \to X$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай бесконечного τ. По определению существует эпиморфизм $g\colon D^{\tau'} \to X$, допускающий регулярный оператор усреднения v. Возьмем вложение $i\colon X \to I^\tau$. Согласно II.6.28 каждая координатная функция g_α отображения $i \circ g$ $(g_\alpha = p_\alpha \circ i \circ g)$ зависит от счетного числа координат. Поэтому отображение g зависит лишь от τ координат, т. е. существует такая ретракция $r\colon D^{\tau'} \to D^\tau$ и такой эпиморфизм $f\colon D^\tau \to X$, что $g = f \circ r$. Покажем, что регулярный оператор $u = v \circ r^*$ является опусом для f. Имеем $u \circ f^* = v \circ r^* \circ f^* = v \circ (f \circ r)^* = v \circ g^* = \mathrm{id}_{C(X)}$. Предложение доказано.

4.5. Предложение. а. *Для произвольного вложения $f\colon X \to I^\omega$ компакта X в гильбертов кирпич существует регулярный оператор продолжения;*

б. *Существует милютинский эпиморфизм $h\colon \prod \to X$.*

Доказательство. Из леммы Милютина и 3.12 вытекает существование эпиморфизма $g\colon \prod \to I^\omega$, допускающего регулярный оператор усреднения v. Положим $Y = g^{-1}f(X)$. Пусть $f_1\colon Y \to \prod$ — тождественное вложение, и пусть $g_1 = f^{-1} \circ (g|Y)$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \prod & \xrightarrow{g} & I^{\omega} \\ {\scriptstyle f_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g_1} & X \end{array}$$

Здесь g, g_1 — эпиморфизмы, а f, f_1 — вложения. Согласно II.5.33 всякое вложение компакта в канторов дисконтинуум — коретракция. По предложению 3.7 существует регулярный оператор продолжения u_1 для вложения f_1. Тогда согласно 3.11 существует регулярный оператор v_1 усреднения для g_1 и регулярный оператор продолжения u для f.

Пусть, наконец, $r\colon \prod \to Y$ — ретракция. По предложению 3.8 существует оператор w_1 усреднения для r. Положим $h = g_1 \circ r$ и $w = v_1 \circ w_1$. По предложению 3.10 w есть регулярный оператор усреднения для h. Предложение 4.5 доказано.

4.6. Следствие. *Всякий компакт является пространством Милютина.*

Из предложения 3.12 непосредственно вытекает

4.7. Предложение. *Произведение пространства Милютина является пространством Милютина.*

4.8. Следствие. *Произведение компактов, в частности D^{τ} и I^{τ}, является пространством Милютина.*

4.9. Скажем, что бикомпакт X удовлетворяет *условию отделимости Бокштейна*, если для непересекающихся открытых множеств $U_1, U_2 \subset X$, существуют содержащие их непересекающиеся открытые F_{σ}-множества.

Поскольку в нормальном пространстве всякое открытое F_{σ}-множество есть ко-нуль-множество, условие отделимости Бокштейна эквивалентно следующему условию.

Для непересекающихся открытых множеств $U_1, U_2 \subset X$ существует такая непрерывная функция $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$, что $\varphi(x) > 0$ для $X \in U_1$ и $\varphi(x) < 0$ для $x \in U_2$.

Ясно также, что бикомпакт X удовлетворяет условию отделимости Бокштейна тогда и только тогда, когда он *совершенно $\varkappa$-нормален*, т. е. всякое канонически открытое подмножество X есть F_{σ}-множество.

4.10. Предложение. *Всякое пространство Милютина совершенно $\varkappa$-нормально.*

Доказательство. Пусть $f\colon D^\tau \to X$ — эпиморфизм, допускающий оператор усреднения u. Пусть U_1, U_2 открыты в X и не пересекаются. Положим $V_i = f^{-1}U_i$. Согласно II.6.22 всякое канонически открытое подмножество D^τ есть F_σ-множество. Поэтому существует такая непрерывная функция $\psi\colon D^\tau \to \mathbb{R}$, что $\psi(y) > 0$, если $y \in \langle[V_1]\rangle$ и $\psi(y) < 0$ для $y \in \langle[V_2]\rangle$. Положим $\varphi = u(\psi)$. В силу положительности оператора u и предложения 3.9 имеем $\varphi(x) > 0$ для $x \in U_1$ и $\varphi(x) < 0$ для $x \in U_2$. Предложение доказано.

Из предложения 4.10 вытекает, что класс пространств Милютина является собственным подклассом класса диадических бикомпактов. В самом деле, имеет место

4.11. Предложение. *Не всякий диадический бикомпакт совершенно $\varkappa$-нормален.*

Доказательство. В бикомпакте D^{ω_1} склеим две точки x_1 и x_2 в одну точку x. Пусть $f\colon D^{\omega_1} \to X$ — соответствующее факторное отображение. Дисконтинуум D^{ω_1} можно представить в виде дизъюнктной суммы бикомпактов Y_1 и Y_2, гомеоморфных D^{ω_1}. При этом можно считать, что $x_i \in Y_i$. Положим $U_1 = X \setminus f(Y_2)$ и $U_2 = X \setminus f(U_1)$. Если бы на X существовала непрерывная функция, разделяющая множества U_1 и U_2, то на $Y_1 \approx D^{\omega_1}$ существовала бы непрерывная функция, положительная всюду, кроме точки x_1. Но это противоречит тому, что непрерывная функция на D^{ω_1} зависит лишь от счетного числа координат. Предложение доказано.

4.12. Предложение. *Замкнутое G_δ-подмножество пространства Милютина является пространством Милютина.*

Доказательство. Пусть $f\colon D^\tau \to X$ — милютинский эпиморфизм и F — замкнутое G_δ-множество в X. Достаточно рассмотреть случай несчетного τ. Множество $Y = f^{-1}F$ как G_δ-подмножество D^τ зависит от счетного числа координат в силу II.6.21. Значит, существует такое счетное множество индексов $A \subset \tau$, что $Y = p_A^{-1}p_A(Y)$. Поскольку нульмерный компакт есть ретракт всякого объемлющего нульмерного компакта

(II.5.33), существует ретракция $r_0 \colon D^A \to p_A(Y)$. Положим $r = r_0 \times \mathrm{id}_{D^\tau \setminus A}$. Отображение r, как легко видеть, — ретракция D^τ на Y. Согласно 3.8 существует регулярный оператор усреднения для отображения $r \colon D^\tau \to Y$. Теперь в силу 3.10 существует регулярный опус для эпиморфизма $(f|Y) \circ r \colon D^\tau \to F$. Предложение доказано.

§ 5. Пространства Дугунджи и нуль-мягкие отображения

5.1. Бикомпакт X называется *пространством Дугунджи*, если всякое вложение $f \colon X \to Y$ в бикомпакт Y допускает регулярный оператор продолжения.

5.2. Предложение. *Бикомпакт X является пространством Дугунджи тогда и только тогда, когда существует вложение $g \colon X \to I^\tau$, допускающее регулярный оператор продолжения.*

Доказательство. Пусть $f \colon X \to Y$ — произвольное вложение, и пусть u — регулярный оператор продолжения для вложения $g \colon X \to I^\tau$. По теореме Брауэра–Титце–Урысона существует такое отображение $g_1 \colon Y \to I^\tau$, что $g = g_1 \circ f$. Положим $v = g_1^* \circ u$. Имеем $f^* \circ v \circ f^* = f^* \circ g_1^* \circ u \circ f^* = (g_1 \circ f)^* \circ u \circ f^* = g^* \circ u \circ f^* =$ (так как u есть оператор продолжения для g)$= f^*$. Итак, v — регулярный опус для вложения f. Предложение доказано.

Из предложений 3.12 и 5.2 вытекает

5.3. Предложение. *Произведение пространств Дугунджи есть пространство Дугунджи.*

Из предложений 4.5, 5.2 и 5.3 вытекает

5.4. Предложение. *Произведение компактов есть пространство Дугунджи.*

Таким образом, имеется некоторый параллелизм не только между свойствами операторов продолжения и усреднения, но и между свойствами пространств Дугунджи и пространств Милютина. Это в свое время дало А. Пелчинскому повод поставить вопрос о совпадении классов пространств Дугунджи и Милютина. Ниже будет дан отрицательный ответ на этот вопрос. Кроме того, увидим, что теория пространств Дугунджи значительно содержательнее, чем теория пространств Милютина.

5.5. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется 0-*мягким* (*нуль-мягким*), если для всякого нульмерного бикомпакта Z, всякого непрерывного отображения $g\colon Z \to Y$ и всякого непрерывного отображения $h\colon A \to X$ замкнутого подмножества $A \subset Z$ с коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & X \\ \cap\downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

существует такое продолжение $k\colon Z \to X$ отображения h, что $g = f \circ k$.

5.6. Предложение. *Всякое* 0-*мягкое отображение* $f\colon X \to Y$ *— открытый эпиморфизм.*

Доказательство. Одновременно доказываем открытость отображения f в произвольной точке $x \in X$ и равенство $f(X) = Y$. Существуют нульмерный бикомпакт Z и такой эпиморфизм $g\colon Z \to Y$, что $g^{-1}(f(x))$ состоит из одной точки. В самом деле, согласно II.6.6 существует отображение $g_0\colon Z_0 \to Y$ нульмерного бикомпакта Z_0 на Y. Преобразуем теперь эпиморфизм $g_0\colon Z_0 \to Y$ следующим образом: стянем множество $g_0^{-1}(f(x))$ в точку и фактор-пространство пространства Z_0 относительно этого стягивания обозначим Z. Тогда отображение g_0 единственным образом раскладывается в композицию фактор-отображения $Z_0 \to Z$ и отображения $g\colon Z \to Y$. Замкнутое подмножество $g_0^{-1}(f(x))$ нульмерного бикомпакта Z_0 обладает в нем базой из открыто-замкнутых окрестностей. Тогда точка $g^{-1}(f(x))$ бикомпакта Z обладает в нем базой из открыто-замкнутых множеств. Следовательно, бикомпакт Z индуктивно-нульмерен и согласно II.5.18 нульмерен.

Остается положить $A = g^{-1}(f(x))$, определить отображение $h\colon A \to X$ равенством $h(A) = x$ и взять продолжение $k\colon Z \to X$ отображения h, для которого $g = f \circ k$. Тогда для любой окрестности U точки x множество $f(U \cap k(Z))$ — окрестность точки $f(x)$. Тем более ее окрестностью будет множество $f(U)$. Кроме того, $Y = g(Z) = f(k(Z)) \subset f(X)$.

5.7. Предложение. *Композиция* 0*-мягких отображений* $f_1: X_1 \to X_2$ *и* $f_2: X_2 \to X_3$ *является* 0*-мягким отображением.*

Доказательство. Пусть отображения $g\colon Z \to X_3$, $h\colon A \to X_1$ непрерывны и $f_2 \circ f_1 \circ h = g \circ i$, где $i\colon A \to Z$ — вложение. Положим $h_1 = f_1 \circ h$. Поскольку f_2 0-мягко, существует такое отображение $k_1: Z \to X_2$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "i"'] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\ Z \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "k_1"] & X_3 \end{tikzcd}$$

коммутативна. Поскольку f_1 0-мягко, коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ Z \arrow[r, "k_1"] & X_2 \end{tikzcd}$$

можно отображением $k\colon Z \to X_1$ дополнить до коммутативной диаграммы. Тогда $f_2 \circ f_1 \circ k = f_2 \circ k_1 = g$. Предложение доказано.

5.8. Предложение. *Пусть* $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}, \alpha < \beta\}$ *— такой непрерывный вполне упорядоченный спектр из бикомпактов, что всякое соседнее отображение* $\pi^{\alpha+1}_\alpha$ 0*-мягко. Тогда сквозная проекция* $\pi_0\colon \lim S \to X_0$ *также* 0*-мягка.*

Доказательство. Трансфинитная индукция по длине спектра S. Переход от $\gamma + 2$ к $\gamma + 3$ получаем согласно 5.7. Пусть теперь спектр S имеет длину $\gamma + 1$, где γ предельно. Тогда в силу непрерывности спектра S его проекция π^γ_0 совпадает со сквозной проекцией $\pi'_0\colon \lim(S|\gamma) \to X_0$, которая 0-мягка по индуктивному предположению. Но спектр S имеет последний элемент X_γ, поэтому сквозная проекция $\pi_0\colon \lim S \to X_0$ совпадает с 0-мягким отображением π^γ_0.

Совершим, наконец, переход к предельной длине γ. Для всякого $\gamma' < \gamma$ сквозная проекция $\lim(S|\gamma') \to X_0$ 0-мягка. Тогда и всякая проекция $\pi_0^{\gamma'}: X_{\gamma'} \to X_0$ 0-мягка. Пусть отображения $g\colon Z \to X_0, h\colon A \to X = \lim S$ непрерывны и диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "\pi_0"] \\ Z \arrow[r, "g"] & X_0 \end{tikzcd}$$

коммутативна. Трансфинитной индукцией, используя 0-мягкость отображений $\pi_\alpha^{\alpha+1}$, непрерывность спектра S и предложение III.1.27, построим последовательность отображений $h_\alpha\colon A \to X_\alpha$ и $k_\alpha\colon Z \to X_\alpha$ так, что при $\alpha' \geqslant \alpha$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_0 & X_\alpha \arrow[l, "\pi_0^\alpha"'] & X_{\alpha'} \arrow[l, "\pi_\alpha^{\alpha'}"'] & X \arrow[l, "\pi_{\alpha'}"'] \\ & Z \arrow[ul, "g"] \arrow[u, "k_\alpha"'] & A \arrow[l, "i"] \arrow[u, "h_{\alpha'}"'] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Тогда коммутативна и предельная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_0 & X \arrow[l, "\pi_0"'] \\ Z \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "\lim\limits_{\alpha<\gamma} k_\alpha"] & A \arrow[l, "i"] \arrow[u, "\lim\limits_{\alpha'<\gamma} h_{\alpha'}"'] \end{tikzcd}$$

Но в силу III.1.27 $\lim h_{\alpha'} = h$. Поэтому, положив $k = \lim k_\alpha$, имеем искомую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "\pi_0"] \\ Z \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "k"] & X_0 \end{tikzcd}$$

Предложение доказано.

5.9. Скажем, что отображение $f\colon X \to Y$ *имеет метризуемое ядро*, если существуют компакт K и вложение $i\colon X \to Y \times K$, такие, что $f = p \circ i$, где $p\colon Y \times K \to Y$ — проектирование. Это эквивалентно тому, что $wf \leqslant \omega$.

Частичным обращением предложения 5.6 является

5.10. Предложение. *Всякий открытый эпиморфизм $f\colon X \to Y$ с метризуемым ядром 0-мягок.*

Доказательство. Пусть $\dim Z = 0$, A замкнуто в Z, $\varkappa\colon A \to Z$ — вложение и диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varkappa"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd} \tag{1}$$

коммутативна. По определению отображения с метризуемым ядром диаграмму (1) можно дополнить до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varkappa"'] & X \arrow[d, "f"] \arrow[r, "i"] & Y \times K \arrow[dl, "p"] \\ Z \arrow[r, "g"] & Y & \end{tikzcd} \tag{2}$$

Определим многозначное отображение $\varphi\colon Z \to K$. Для $z \in A$ положим $\varphi(z) = qih\varkappa^{-1}(z)$, где $q\colon Y \times K \to K$ — проектирование. Для $z \in Z \setminus A$ положим $\varphi(z) = qif^{-1}g(z)$. Покажем, что φ полунепрерывно снизу. Пусть U открыто в K. Тогда $\varphi^{-1}U = \{z \in Z\colon U \cap \varphi(z) \neq \varnothing\} = \{z \in Z \setminus A\colon f^{-1}g(z) \cap i^{-1}q^{-1}U \neq \varnothing\} \cup \{z \in A\colon h\varkappa^{-1}(z) \cap i^{-1}q^{-1}U \neq \varnothing\}$. Положим $V = i^{-1}q^{-1}U$. Множество V открыто в X и $\varphi^{-1}U = \varkappa h^{-1}V \cup (g^{-1}f(V) \setminus A)$. Множество $g^{-1}f(V) \setminus A$ открыто в силу открытости отображения f. Множество $\varkappa h^{-1}$ открыто в A. Существует такое открытое в Z множество W, что $\varkappa h^{-1}V = A \cap W$. Тогда

$$\varphi^{-1}U = (W \cap g^{-1}f(V)) \cup (g^{-1}(V) \setminus A),$$

поскольку $\varkappa h^{-1}V \subset g^{-1}f(V)$. Итак, φ полунепрерывно снизу.

По теореме Майкла (см. гл. VI) существует непрерывная селекция $\psi\colon Z \to K$ отображения φ. Положим $k_1 : Z \to Y \times K$ равным диагональному произведению отображений g и ψ. Поскольку $\psi(z) \in qif^{-1}g(z)$, то $k_1(z) \in \{g(z)\} \times qif^{-1}g(z) = pif^{-1}g(z) \times qif^{-1}g(z)$. Поэтому $k_1(Z) \subset i(X)$ и определено отображение $k = i^{-1} \circ k_1 : Z \to X$. Коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varkappa"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "k"] & Y \end{tikzcd}$$

проверяется непосредственно. Предложение доказано.

5.11. Бикомпакт X называется *абсолютным экстензором в размерности нуль* ($AE(0)$-бикомпактом), если всякое непрерывное отображение $f\colon A \to X$ замкнутого подмножества нульмерного бикомпакта Z продолжается на Z. Очевидно, что X является $AE(0)$-бикомпактом тогда и только тогда, когда постоянное отображение X 0-мягко. Поэтому из 5.10 вытекает

5.12. Предложение. *Всякий компакт есть абсолютный экстензор в размерности нуль.*

5.13. Предложение. *Пусть $f\colon X \to Y$ — 0-мягкое отображение. Тогда X есть $AE(0)$-бикомпакт в том и только в том случае, когда Y есть $AE(0)$-бикомпакт.*

Доказательство. Пусть Y есть $AE(0)$-бикомпакт и $y \in Y$ — произвольная точка. Тогда отображение $g\colon Y \to \{y\}$ 0-мягко по 5.11. Согласно 5.7 композиция $g \circ f$ 0-мягка и, значит, в силу 5.11 X есть $AE(0)$-бикомпакт.

Пусть теперь X есть $AE(0)$-бикомпакт, $\dim Z = 0$, $A = [A] \subset Z$ и $g\colon A \to Y$ — непрерывное отображение. Отображение $h_1 : \varnothing \to X$ в силу 0-мягкости f можно продолжить до отображения $h\colon A \to X$ так, что $f \circ h = g$. Поскольку X есть $AE(0)$-бикомпакт, отображение $h\colon A \to X$ можно продолжить до отображения $k\colon Z \to X$. Тогда $f \circ k$ — искомое продолжение отображения g. Предложение доказано.

5.14. Эпиморфизм $f\colon X \to Y$ называется *отображением Дугунджи*, если для некоторого отображения $g\colon X \to I^\tau$ диагональное произведение $g \Delta f$ является вложением, допускающим регулярный оператор продолжения $u \cdot C(X) \to C(I^\tau \times Y)$, который отображает $f^*(C(Y))$ в $p_Y^*(C(Y))$, где $p_Y : I^\tau \times Y \to Y$ — проектирование.

Из этого определения вытекает, что пространства Дугунджи — это бикомпакты, постоянные отображения которых суть отображения Дугунджи.

5.15. Предложение. *Всякое* 0-*мягкое отображение* $f\colon X \to Y$ *является отображением Дугунджи.*

Доказательство. Пусть $g\colon X \to I^\tau$ — вложение. Вложение $g\Delta f\colon X \to I^\tau \times Y$ обозначим $\varkappa$. Существует милютинский эпиморфизм $h\colon Z \to I^\tau \times Y$ нульмерного бикомпакта Z (ограничение милютинского эпиморфизма $h^1\colon D^{\tau'} \to I^{\tau'} \supset I^\tau \times \times Y$). Пусть $u\colon C(Z) \to C(I^\tau \times Y)$ — соответствующий оператор усреднения. Положим $A = h^{-1}\varkappa(X)$. Поскольку отображение $f \circ \circ \varkappa^{-1}\colon \varkappa(X) \to Y$ 0-мягко, существует отображение $k_1\colon Z \to \to \varkappa(X)$, которое на A совпадает с h. Положим $k = \varkappa^{-1} \circ \circ k_1$ и $v = u \circ k^*$. Регулярный оператор v есть оператор продолжения для $\varkappa$. В самом деле, пусть $x \in X$ и $\varphi \in C(X)$. Тогда $k^*(\varphi)(k^{-1}x) = \varphi(x)$. В то же время $k^{-1}x = k_1^{-1}\varkappa(x) \supset \supset h^{-1}\varkappa(x)$. Поэтому $u \circ k^*(\varphi)(\varkappa(x)) = \varphi(x)$ согласно 3.9. Итак, $\varkappa^* \circ v(\varphi)(x) = v(\varphi)(\varkappa(x)) = \varphi(x)$.

Проверим, что $v(f^*(C(Y))) \subset p_Y^*(C(Y))$. Надо показать, что для $\varphi \in C(Y)$ функция $v \circ f^*(\varphi)$ постоянна на множестве $p_Y^{-1}(y)$.

Из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ Z \arrow[u, "k"] \arrow[r, "h"] & I^\tau \times Y, \arrow[u, "p_Y"'] \end{tikzcd}$$

в которой все отображения суть эпиморфизмы, получаем $\varphi(y) = = \varphi(fkh^{-1}p_Y^{-1}y) = f^*(\varphi)(kh^{-1}p_Y^{-1}y) = k^* \circ f^*(\varphi)(h^{-1}p_Y^{-1}y) =$ (согласно 3.9) $= u \circ k^* \circ f^*(\varphi)(p_Y^{-1}y) = v \circ f^*(\varphi)(p_Y^{-1}y)$. Предложение доказано.

5.16. В семействе всех отображений из бикомпакта X вводится отношение $\prec$, являющееся предпорядком. А именно $f \succ g$, если разбиение $\{f^{-1}y\colon y \in Y\}$ вписано в разбиение $\{g^{-1}z\colon z \in \in Z\}$. Этот предпорядок превращается в частичный порядок, если отождествим *эквивалентные отображения*, т. е. такие отображения f и g, что $f \prec g$ и $g \prec f$. Семейство всех эпиморфизмов из X с таким отождествлением обозначим $E(X)$.

5.17. Пусть $\{f_\alpha\colon X \to Y_\alpha, \alpha \in \mathrm{A}\}$ — некоторое семейство отображений. *Внутренним произведением* этого семейства назовем эпиморфизм $\underset{\alpha\in\mathrm{A}}{\otimes} f_\alpha$, эквивалентный диагональному произведению $\underset{\alpha\in\mathrm{A}}{\Delta} f_\alpha$, т.е. $\underset{\alpha\in\mathrm{A}}{\otimes} f_\alpha$ совпадает с диагональным произведением $\underset{\alpha\in\mathrm{A}}{\Delta} f_\alpha$, рассматриваемым как отображение на свой образ.

5.18. Предложение. *Множество $E(X)$ — полная решетка (частично упорядоченное множество, в котором для любого его подмножества определены точная верхняя и нижняя грани), причем $\sup\Phi = \otimes\Phi$ для всякого $\Phi \subset E(X)$.*

Доказательство. Пусть $g \in E(X)$ и $g \succ f$ для каждого $f \in \varphi$, где $\Phi \subset E(X)$. Это означает, что для всякого $f \in \Phi$ существует такой эпиморфизм $h_f\colon \operatorname{Im} g \to \operatorname{Im} f$, что $h_f \circ g = f$. Тогда $\otimes\Phi = \underset{f\in\Phi}{\otimes}(h_f \circ g) = (\underset{f\in\Phi}{\otimes} h_f) \circ g$, поскольку для всякого эпиморфизма $g\colon X \to Y$ и всякого семейства эпиморфизмов $h_\alpha\colon Y \to Z_\alpha$ имеем

$$\underset{\alpha}{\otimes}(h_\alpha \circ g) = (\underset{\alpha}{\otimes} h_\alpha) \circ g. \tag{3}$$

Считая равенство (3) доказанным, получаем, что g — делитель отображения $\otimes\Phi$, т.е. $g \succ \otimes\Phi$, и, значит, $\otimes\Phi = \sup\Phi$. Таким образом, ограниченное снизу (постоянным отображением) частично упорядоченное множество $E(X)$ является полной вверх полурешеткой. В этом случае $E(X)$ — полная решетка, поскольку $\inf\Phi = \sup\Gamma$, где $\Gamma = \{g \in E(X)\colon g \prec f$ для всякого $f \in \Phi\}$.

Проверка равенства (3) предоставляется читателю. Предложение доказано.

5.19. В нижеследующих леммах считаем бикомпакт X подмножеством одного и того же произведения $\prod\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} X_\alpha$. Для подмножества $B \subset A$ индексов положим $X(B) = p_B^{-1} p_B(X)$. Для любого отображения $f\colon X \to Y$ положим $d(f) = A \setminus \{\alpha \in \mathrm{A}\colon p_{A\setminus\langle\alpha\rangle}|X \succ f\}$, т.е. $d(f)$ — это совокупность всех индексов координат, от которых зависит f.

5.20. Лемма. $\bigcup\limits_{\beta} d(f_\beta) = d(\underset{\beta}{\otimes} f_\beta)$.

Доказательство. Поскольку более мелкое отображение зависит от большего числа координат, имеем $\cup d(f_\beta) \subset d(\otimes f_\beta)$.

Пусть теперь $\alpha \notin \cup d(f_\beta)$, т.е. $p_{A\setminus\langle\alpha\rangle}|X \succ f_\beta$ для всякого β. Тогда $p_{A\setminus\{\alpha\}}|X \succ \otimes f_\beta$ согласно 5.18. Значит, $\alpha \notin d(\otimes f_\beta)$. Лемма доказана.

5.21. Следствие.

$$d(\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \ldots \cdot \varphi_n) \subset \bigcup_{i=1}^{n} d(\varphi_i) \text{ для } \varphi_i \in C(X).$$

5.22. Лемма. $p_{\cup B_\beta} \sim \otimes p_{B_\beta}$ *(имеется в виду ограничение отображений на $X \subset \prod X_\alpha$).*

Доказать самим.

5.23. Пусть $u\colon C(X) \to C\left(\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha\right)$ — регулярный оператор продолжения. Назовем *u-допустимым* всякое такое множество $B \subset A$, что для $\varphi \in C(X)$ из $d(\varphi) \subset B$ следует $d(u(\varphi)|X(B)) \subset B$. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *u-допустимым*, если $f \sim p_B$ для некоторого u-допустимого B.

5.24. Лемма. *Пусть $B \subset A$ — некоторое u-допустимое множество и $\varphi \in C(X)$. Тогда при $d(\varphi) \subset B$ имеем $u(\varphi \cdot \psi)(x) = u(\varphi)(x) \cdot u(\psi)(x)$ для всех $\psi \in C(X)$ и $x \in X(B)$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $y \in X(B)$ таковы, что $p_B(x) = p_B(y)$. Пусть $u(\varphi)(y) = 0$ и $d(\varphi) \subset B$. Тогда $u(|\varphi|)(y) = 0$. Действительно, $0 = u(\varphi)(y) = u(\varphi)(x) = |\varphi(x)| = u(|\varphi|)(x) = u(|\varphi|)(y)$(последнее равенство вытекает из $d(|\varphi|) \subset B$).

Пусть теперь $\varphi, \psi \in C(X)$, $d(\varphi) \subset B$ и $x \in X(B)$. Если $u(\varphi)(x) = 0$, то $u(|\varphi|)(x) = 0$ и $|u(\varphi \cdot \psi)(x)| \leqslant u(\|\psi\| \cdot |\varphi|)(x) = \|\psi\| \times u(|\varphi|)(x) = 0$. Если же $u(\varphi)(x) = c$, то $0 = u((\varphi - c) \cdot \psi)(x) = u(\varphi \times \psi)(x) - cu(\psi)(x)$, т.е. $u(\varphi \cdot \psi)(x) = u(\varphi)(x) \cdot u(\psi)(x)$. Лемма доказана.

5.25. Лемма. *Объединение $\cup B_\beta$ u-допустимых множеств u-допустимо.*

Доказательство. Для любой функции $\varphi = \varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n$, где $d(\varphi_k) \subset B_\beta$ в силу 5.24 имеем $u(\varphi)(x) = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} u(\varphi_k)(x)$ для всех $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} X(B_{\beta_k}) = X(\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_{\beta_k}) \supset X(\cup B_\beta)$. Кроме того, из 5.21 вытекает, что $d(\varphi) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_{\alpha_k} \subset \cup B_\beta \equiv B$. Теперь, опираясь на теорему Вейерштрасса–Стоуна, на основании линейности и непрерывности оператора u можно заключить, что при $d(\varphi) \subset B$ будет $d(u(\varphi)|X(B)) \subset B$. Лемма доказана.

Из лемм 5.22 и 5.25 вытекает

5.26. Лемма. *Внутреннее произведение u-допустимых отображений u-допустимо.*

5.27. Лемма. *Пусть в произведении $\prod\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} X_\alpha$ все сомножители, кроме может быть одного X_{α_0}, являются компактами. Тогда если $\{\alpha_0\}$ u-допустимо, то для всякого $\alpha \in \mathrm{A}$ существует счетное u-допустимое множество $B_\alpha \ni \alpha$.*

Доказательство. Для всякого бесконечного $B \subset A \setminus \{\alpha_0\}$ определим $B' \supset B$ так, чтобы $\alpha_0 \notin B'$, $|B'| = |B|$ и для любого $\varphi \in C(X)$ с $d(\varphi) \subset B$ было бы $d(u(\varphi)) \subset B' \cup \{\alpha_0\}$. Это можно сделать, положив

$$B' = B \cup \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} d(u(\varphi_\gamma \circ p_B|X)) \setminus \{\alpha_0\}\right),$$

где $\{\varphi_\gamma\colon \gamma \in \Gamma\}$ — плотное в $C\Big(\prod\limits_{\beta\in B} X_\beta\Big)$ семейство функций мощности $|\Gamma| = |B|$, существующее в силу II.3.12 (здесь пользуемся тем, что все X_β имеют счетный вес). Тогда $|B'| = |B|$, поскольку все слагаемые $d(u(\varphi_\gamma \circ p_B|X))$ счетны по теореме Вейерштрасса–Стоуна. Если $d(\varphi) \subset B$, то к φ равномерно сходится последовательность функций вида $\varphi_{\gamma_i} \circ p_B|X$ и по непрерывности оператора u имеем

$$d(u(\varphi)) \subset \bigcup_i d(u(\varphi_{\gamma_i} \circ p_B|X)) \subset B' \cup \{\alpha_0\}.$$

Положим теперь $B_1 = \{\alpha\}$, $B_{n+1} = B'_n$ и $B_\alpha = \Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \cup \{\alpha_0\}$. В пространстве $C\Big(\prod\limits_{\alpha'\in B_\alpha} X_{\alpha'}\Big)$ в силу теоремы Вейерштрасса–Стоуна плотно множество конечных сумм функций вида $\varphi \cdot \psi$, где $d(\varphi) = \{\alpha_0\}$ и $d(\psi) \subset B_n$ для некоторого n. Поэтому в изоморфном ему пространстве $\{f \in C(X)\colon d(f) \subset B_\alpha\}$ плотно множество конечных сумм функций вида $\varphi \cdot \psi$, где $d(\varphi) = \{\alpha_0\}$ и $d(\psi) \subset B_n$. Согласно 5.24 имеем $u(\varphi \cdot \psi)(x) = u(\varphi)(x) \cdot u(\psi)(x)$ для всех $x \in X(\{\alpha_0\}) \supset X(B_\alpha)$. Поэтому по следствию 5.21 имеем $d(u(\varphi \cdot \psi)|X(B_\alpha)) \subset d(u(\varphi)|X(B_\alpha)) \cup d(u(\psi)|X(B_\alpha))$.

Но $d(u(\varphi)|X(B_\alpha)) \subset d(u(\varphi)|X(\{\alpha_0\})) = \{\alpha_0\}$, а $d(u(\psi)|X(B_\alpha)) \subset \subset d(u(\psi)) \subset B_{n+1} \cup \{\alpha_0\}$. Итак, $d(u(\varphi \cdot \psi)|X(B_\alpha)) \subset B_\alpha$. Из линейности и непрерывности оператора u получаем теперь u-допустимость множества B_α. Лемма доказана.

5.28. Лемма. *Если в произведении $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ все сомножители являются компактами, то всякий индекс α содержится в счетном u-допустимом множестве B_α.*

Доказательство. Рассмотрим вложение $i\colon X \to X \times \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, определяемое равенством $i(x) = (x, x)$. Для $\varphi \in C(X)$ и $y \in \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ положим $v(\varphi)(x, y) = u(\varphi)(y)$. Очевидно, что $v\colon C(X) \to C\left(X \times \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha\right)$ есть регулярный оператор продолжения для вложения i. Кроме того, первая координата v-допустима, поскольку продолжения функций от нее не зависят. По лемме 5.27 существует счетное v-допустимое множество $B_\alpha \ni \alpha$. Но оно, очевидно, будет и u-допустимым. Лемма доказана.

5.29. Лемма. *Всякий u-допустимый эпиморфизм открыт.*

Доказательство. Достаточно проверить открытость проектирования $p_B|X\colon X \to p_B(X)$ для любого u-допустимого B. Пусть $x_0 \in X$ и Ox_0 — произвольная замкнутая окрестность. Зафиксируем такую функцию $f \in C(X)$, что $f(x_0) = 1$ $(0 \leqslant f(x) \leqslant 1)$ и $f(x) = 0$ при $x \notin Ox_0$. Определим функцию $\varphi\colon p_B(X) \to I$ равенством

$$\varphi(x) = \sup\{u(f)(y)\colon p_B(y) = x\}.$$

В силу открытости проектирования $p_B\colon X(B) \to p_B(X)$ функция φ непрерывна.

Поскольку $\varphi(p_B(x_0)) = 1$, для доказательства того, что $p_B(Ox_0)$ есть окрестность точки $p_B(x_0)$, т. е. что $p_B|X$ открыто, достаточно установить, что $\varphi(y) = 0$ при $y \notin p_B(Ox_0)$. Пусть $x \in X$ и $p_B(x) = y$. Зафиксируем $\psi \in C(p_B(X))$ так, чтобы $\|\psi\| = 1, \psi(y) = 1$ и $\psi(p_B(Ox_0)) = 0$. Тогда $\|\psi \circ p_B + f\| = 1$ и, значит, $\|u(\psi \circ p_B + f)\| = 1$. В частности, $1 \geqslant u(\psi \circ p_B)(x) + u(f)(x) = \psi p_B(x) + u(f)(x) = 1 + u(f)(x)$, откуда $u(f)(x) = 0$, так как

$u(f) \geqslant 0$. Итак, $u(f)(x) = 0$ для всех x с $p_B(x) = y$. Значит, $\varphi(y) = 0$. Лемма доказана.

5.30. Скажем, что отображение $f\colon X \to Y$ *обладает разложением Хэйдона*, если f гомеоморфно сквозной проекции $\pi_0\colon \lim S \to X_0$ такого непрерывного вполне упорядоченного спектра S, что в нем все соседние проекции $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ открыты и имеют метризуемое ядро.

5.31. Предложение. *Всякий эпиморфизм Дугунджи обладает разложением Хэйдона.*

Доказательство. Условие, что $f\colon X \to Y$ — отображение Дугунджи, можно теперь сформулировать так: $X \subset \prod\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} X_\alpha$, где $X_{\alpha_0} = Y$ и $X_\alpha = I$ при $\alpha \neq \alpha_0$, $f = p_{\alpha_0}|X$, и существует такой регулярный оператор продолжения $u\colon C(X) \to C\Big(\prod\limits_\alpha X_\alpha\Big)$, что $\{\alpha_0\}$ u-допустимо. По лемме 5.27 для любого $\alpha \neq \alpha_0$ существует счетное u-допустимое $B_\alpha \ni \alpha$. Теперь считаем, что A есть совокупность всех непредельных порядковых чисел, меньших $|A|$, и что $\alpha_0 = 0 \in B_0$. Положим $X_\alpha = p_{B^\alpha}(X)$, где $B^\alpha = \bigcup\limits_{\beta\leqslant\alpha} B_\beta$. Отображения $\pi_\beta^\alpha\colon X_\alpha \to X_\beta$ определяются как ограничения соответствующих проектирований произведения. Полученная система $\{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, A\}$ дополняется до непрерывного спектра S, пределом которого служит X, а $f = \pi_0$. Для $\alpha \in A$ сквозные проекции $\pi_\alpha = p_\alpha$ u-допустимы согласно леммам 5.22 и 5.26. Для предельного α по предложению 5.18 имеем $\pi_\alpha = \bigotimes\limits_{\beta\in\mathrm{A}_\alpha} \pi_\beta$, где $\mathrm{A}_\alpha = \{\beta \in \mathrm{A}\colon \beta < \alpha\}$ и снова π_α u-допустимо по лемме 5.26. По лемме 5.28 все сквозные проекции открыты. Значит, открыты и все соседние проекции $\pi_\alpha^{\alpha+1}$. Кроме того, они имеют метризуемые ядра в силу счетности множеств B_α. Предложение доказано.

5.32. Теорема. *Для отображения f бикомпакта X на бикомпакт Y следующие условия эквивалентны:*

1°) *f обладает разложением Хэйдона;*

2°) *f 0-мягко;*

3°) *f является отображением Дугунджи.*

Доказательство. Импликация $1° \Rightarrow 2°$ вытекает из предложений 5.8 и 5.10, импликация $2° \Rightarrow 3°$ — из 5.15, импликация $3° \Rightarrow 1°$ — из 5.31.

5.33. Скажем, что бикомпакт X обладает *разложением Хэйдона*, если разложением Хэйдона обладает постоянное отображение X. Поскольку точка, очевидно, есть $AE(0)$-бикомпакт, то из предложения 5.13 и только что доказанной теоремы вытекает

5.34. Теорема Хэйдона. *Для бикомпакта X следующие условия эквивалентны:*

1°) *X — пространство Дугунджи;*

2°) *X обладает разложением Хэйдона;*

3°) *X есть $AE(0)$-бикомпакт.*

§ 6. Несовпадение классов Милютина и Дугунджи

6.1. Теорема. *Всякое пространство Дугунджи X является пространством Милютина.*

Доказательство. Пусть $i\colon X \hookrightarrow I^\tau$ — вложение. Существует милютинский эпиморфизм $f\colon D^\tau \to I^\tau$. Пусть $A = f^{-1}i(X)$ и $g = i^{-1} \circ f\colon A \to X$. По теореме Хэйдона X есть $AE(0)$-бикомпакт. Поэтому существует эпиморфизм $h\colon D^\tau \to X$, совпадающий с g на A. Пусть u — оператор усреднения для f. Положим $v = i^* \circ u$. Тогда если $\varphi \in C(X)$, то $v \circ h^*(\varphi)(x) = i^* \circ u \circ h^*(\varphi)(x) = u \circ h^*(\varphi)(ix) =$ (согласно 3.9) $= h^*(\varphi)(f^{-1}i(x)) = h^*(\varphi)(g^{-1}x) = \varphi(h(g^{-1}x)) = \varphi(x)$. Значит, v есть оператор усреднения для h. Теорема доказана.

6.2. Следствие. *Всякое пространство Дугунджи есть диадический бикомпакт.*

6.3. Теорема. *Всякое пространство Милютина веса ω_1 является пространством Дугунджи.*

Доказательство. В силу теоремы Хэйдона (5.34) достаточно показать, что пространство Милютина X веса ω_1 — предел непрерывного вполне упорядоченного спектра из компактов и открытых проекций. Пусть $f\colon D^{\omega_1} \to X$ — милютинский эпиморфизм и u — соответствующий ему регулярный оператор усреднения. Представим X и D^{ω_1} в виде пределов непрерывных вполне упорядоченных спектров S и S' из компактов. При этом можно считать, что проекции спектра S' открыты как проекции произведения. Согласно III.3.10 можно считать, переходя в случае надобности к конфинальным подспектрам, что существует морфизм $\Phi = \{f_\alpha\}\colon S' \to S$, пределом которого является отображение f. Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \alpha < \omega_1\}, S' = \{Y_\alpha, \rho^\alpha_\beta, \alpha < \omega_1\}$. Для того чтобы X было пределом спектра из компактов с открытыми проекциями, достаточно показать, что для любого $\alpha < \omega_1$ существует $\beta \geqslant \alpha$, для которого сквозная проекция $\pi_\beta\colon \lim S = X \to X_\beta$ открыта.

По индукции построим такую растущую последовательность сепарабельных подколец $C_j \subset C(D^{\omega_1})$ и такую растущую последовательность порядковых чисел α_i, что $\alpha_0 = \alpha$,

$$C_i \subset \rho^*_{\alpha_{i+1}}(C(Y_{\alpha_{i+1}})) \subset C_{i+1}, \tag{1}$$

$$u(C_i) \subset \pi^*_{\alpha_{i+1}}(C(X_{\alpha_{i+1}})) \subset u(C_{i+1}). \tag{2}$$

Для этого положим $C_0 = \rho^*_{\alpha_0}(C(Y_{\alpha_0}))$. Поскольку множество $u(C_0)$ сепарабельно (II.3.12), а всякая функция $\varphi \in C(X)$ имеет вид $\pi^*_\gamma(\psi)$ (III.3.2), существует такое $\alpha'_0 \geqslant \alpha_0$, что $u(C_0) \subset \pi^*_{\alpha'_0}(C(X_{\alpha'_0}))$. По тем же причинам существует такое $\alpha_1 \geqslant \alpha'_0$, что $f^*\pi^*_{\alpha'_0}(C(X_{\alpha'_0})) \subset \rho^*_{\alpha_1}(C(Y_{\alpha_1}))$. Обозначим через C_1 наименьшее подкольцо в $C(D^{\omega_1})$, содержащее (сепарабельное) множество $\rho^*_{\alpha_1}(C(Y_{\alpha_1})) \cup f^*\pi^*_{\alpha_1}(C(X_{\alpha_1}))$. Включения (1) и (2) выполнены. И так далее.

Теперь положим $\beta = \sup\{\alpha_i\colon i \in \omega\}$ и $C = [\cup\{C_i\colon i \in \omega\}]$. Тогда из (1) и (2) следует, что $C = [\bigcup_i \rho^*_{\alpha_i}(C(Y_{\alpha_i}))]$ и $u(C) = [\bigcup_i \pi^*_{\alpha'_i}(C(X_{\alpha'_i}))]$. Но по теореме Вейерштрасса–Стоуна $[\bigcup_i (\rho^\beta_{\alpha_i})^*(C(Y_{\alpha_i}))] = C(Y_\beta)$ и $[\bigcup_i (\pi^\beta_{\alpha'_i})^*(C(X_{\alpha_i}))] = C(X_\beta)$. Учитывая также, что для $g\colon Z_1 \to Z_2$ оператор g^* осуществляет изометрическое вложение полного пространства $C(Z_2)$ в $C(Z_1)$, имеем

$$C = \rho^*_\beta\left[\bigcup_i (\rho^\beta_{\alpha_i})^*(C(Y_{\alpha_i}))\right] = \rho^*_\beta(C(Y_\beta)), \tag{3}$$

$$u(C) = \pi^*_\beta\left[\bigcup_i (\pi^\beta_{\alpha_i})^*(C(X_{\alpha_i}))\right] = \pi^*_\beta(C(X_\beta)). \tag{4}$$

Теперь проверяем открытость проекции π_β. Пусть $x \in X$, Ox — произвольная замкнутая окрестность точки x. Покажем, что $\pi_\beta(Ox)$ есть окрестность точки $\pi_\beta(x)$. В силу открытости проекции ρ_β множество $\rho_\beta(f^{-1}Ox)$ — окрестность множества $\rho_\beta(f^{-1}x)$. Возьмем такую функцию $\varphi \in C(Y_\beta)$, что $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi(\rho_\beta(f^{-1}x)) = 1$ и $\varphi(Y_\beta \setminus \rho_\beta(f^{-1}x)) = 0$. Функция $\rho_\beta^*(\varphi)$ равна 1 на $\rho_\beta^{-1}\rho_\beta(f^{-1}x)$. Тем более $\rho_\beta^*(\varphi)(f^{-1}x) = 1$. Согласно 3.9 имеем $u \circ \rho_\beta^*(\varphi)(x) = 1$. С другой стороны, в силу равенств (3) и (4) существует такая функция $\psi \in C(X_\beta)$, что $u\rho_\beta^*(\varphi) = \pi_\beta^*(\psi)$. Имеем $\psi\pi_\beta(x) = 1$. Осталось показать, что $\psi(z) = 0$ для всякой точки $z \notin \pi_\beta(Ox)$. Поскольку $\pi_\beta \circ f = f_\beta \circ \rho_\beta$ и, значит, $\pi_\beta(Ox) = f_\beta\rho_\beta(f^{-1}Ox)$, имеем $f_\beta^{-1}z \cap \rho_\beta(f^{-1}Ox) = \varnothing$. Следовательно, $\varphi(f_\beta^{-1}z) = 0$, откуда $0 = \rho_\beta^*(\varphi)(\rho_\beta^{-1}f_\beta^{-1}z) = \rho_\beta^*(\varphi)(f^{-1}\pi_\beta^{-1}z)$. Опять, согласно 3.9, имеем $u \circ \rho_\beta^*(\varphi)(\pi_\beta^{-1}z) = 0$ и, значит, $\psi(z) = 0$. Открытость проекции π_β, а вместе с ней и теорема 6.3 доказана.

6.4. Лемма. *Пусть $f\colon X \to Y$ — открытое отображение нульмерного бикомпакта X на Y. Если все прообразы $f^{-1}y$ гомеоморфны D^ω и существует такое отображение $g\colon X \to D^\omega$, что $f \otimes g = \mathrm{id}_X$, то f гомеоморфно проектированию $Y \times D^\omega \to Y$.*

Доказательство. При наших предположениях можно считать, что $X \subset Y \times D^\omega$ и f есть ограничение проектирования $Y \times D^\omega \to Y$ на X. Бикомпакт Y нульмерен как открытый образ нульмерного бикомпакта. По индукции построим такую последовательность $\gamma_n = \{X_{i_1,\dots,i_n} : i_k = 0, 1\}$ открыто-замкнутых дизъюнктных покрытий X, что

$$X_{i_1\dots i_n i_{n+1}} \subset X_{i_1\dots i_n}, \tag{5}$$

$$X_{i_1\dots i_n} \cap f^{-1}y \text{ гомеоморфно } D^\omega \text{ для всякого } y \in Y, \tag{6}$$

$$\operatorname{diam}\gamma_n \to 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{7}$$

где $\operatorname{diam}\gamma_n = \max\{\sup\{\operatorname{diam} X_{i_1,\dots,i_n} \cap f^{-1}y\colon y \in Y\} : i_1, \dots, i_n\}$, а метрика на $f^{-1}y$ индуцирована метрикой на $\{y\} \times D^\omega$.

Если такая последовательность γ_n построена, то определяем эпиморфизм $\pi_n\colon X \to Y \times D^n$ равенством

$$\pi_n(X_{i_1\dots i_n} \cap f^{-1}y) = (y, (i_1, \dots, i_n)).$$

Отображение π_n непрерывно (и даже открыто) как диагональное произведение отображений $f\colon X \to Y$ и $\omega_n\colon X \to D^n$, где $\omega_n(X_{i_1,\dots,i_n}) = (i_1,\dots,i_n)$. При этом условие (5) гарантирует коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} Y \times D^{n+1} \arrow[d, "q_n^{n+1}"'] & X \arrow[l, "\pi_{n+1}"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "\pi_n"'] \\ Y \times D^n \arrow[r, "p_n"'] & Y \end{tikzcd}$$

где p_n и q_n^{n+1} — естественные проектирования произведений.

Условие (7) гарантирует, что предельное отображение $\pi_\omega\colon X \to Y \times D^\omega$ есть гомеоморфизм, а отображение f гомеоморфно проектированию $p_\omega\colon Y \times D^\omega \to Y$.

Итак, для завершения доказательства леммы нам достаточно построить последовательность $\{\gamma_n\}$. Пусть $y \in Y$ — произвольная точка. Множество $f^{-1}y$ есть канторово множество, лежащее в канторовом множестве $\{y\} \times D^\omega$. Очевидно, что D^ω можно разбить на два дизъюнктных отрезка $\prod_0^y$ и $\prod_1^y$ так, что

$$f^{-1}y \cap \{y\} \times \prod\nolimits_i^y \text{ гомеоморфно } D^\omega, \tag{6$'$}$$

$$\operatorname{diam} f^{-1}y \cap \{y\} \times \prod\nolimits_i^y < \frac{2}{3}\operatorname{diam} f^{-1}(y). \tag{7$'$}$$

Поскольку отображение f открыто, существует такая открыто-замкнутая окрестность Oy точки y, что для всякой точки $z \in$ $\in Oy$ имеем

$$f^{-1}z \cap \{y\} \times \prod\nolimits_i^y \text{ гомеоморфно } D^\omega, \tag{6$''$}$$

$$\operatorname{diam} f^{-1}z \cap \{z\} \times \prod\nolimits_i^y < \frac{2}{3}\operatorname{diam} f^{-1}z. \tag{7$''$}$$

Из покрытия $\{Oy\colon y \in Y\}$ выберем конечное подпокрытие $\{Oy_1,\dots,Oy_s\}$ и положим $O_k = Oy_k \setminus \bigcup\limits_{j<k} Oy_j$. После этого положим

$$X_i = X \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{s} O_k \times \prod\nolimits_i^{y_k}\Big), \quad i = 0, 1.$$

Условие ($7''$) гарантирует неравенство $\operatorname{diam} X_i \cap f^{-1}y < 2/3$. Теперь, отправляясь от X_0 и X_1, строим $X_{i_1 i_2}$ так, чтобы $\operatorname{diam} X_{i_1 i_2} \cap f^{-1}y < 4/9$. И так далее. Лемма доказана.

6.5. Теорема. *Нульмерное однородное по характеру пространство Дугунджи X бесконечного веса τ гомеоморфно D^τ.*

Доказательство. Утверждение тривиально при $\tau = \omega$. Пусть теперь τ несчетно. Согласно II.5.24 можно считать, что $X \subset D^A$, где $|A| = \tau$. Фиксируем регулярный оператор продолжения $u\colon C(X) \to C(D^A)$. Пусть $B \subset A$ — произвольное u-допустимое множество мощности $< \tau$. В силу однородности X по характеру (характер во всех точках одинаков и равен τ согласно 6.2 и II.6.35) отображение $p_B|X$ не имеет ни одной точки однократности, т.е. для любого $x \in p_B(X)$ существует такое $\alpha(x) \in A$, что $p_{\alpha(x)}(x)(p_B^{-1}x) = D$. Но это же соотношение выполнено и в некоторой окрестности точки x в $p_B(X)$ в силу открытости отображения $p_B|X$ как u-допустимого эпиморфизма (5.29). Выбирая из покрытия такими окрестностями конечное подпокрытие и рассматривая соответствующий ему набор $B' = \{\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)\}$, получим, что ограничение проектирования $p_B^{B\cup B'}\colon D^{B\cup B'} \to D^B$ на $p_{B\cup B'}(X)$ не имеет точек однократности. Определим по индукции растущую последовательность $B_1 = B, \dots, B_n = B_{n-1} \cup \overline{B'_{n-1}}, \dots$ u-допустимых множеств, где $\overline{C}$ — не более чем счетное u-допустимое множество, содержащее C, которое существует согласно леммам 5.25 и 5.28. Тогда $|B_{n+1} \setminus B_n| \leqslant \omega$ и ограничение проектирования $p_{B_n}^{B_{n+1}}\colon D^{B_{n+1}} \to D^{B_n}$ на $p_{B_{n+1}}(X)$ не имеет точек однократности. Положим $B^+ = \bigcup\limits_n B_n$. Тогда B^+ u-допустимо и $|B^+ \setminus B| \leqslant \omega$. Кроме того, добились того, что все прообразы точек из $p_B(X)$ относительно $p_B^{B^+}|p_{B^+}(X)$ не имеют изолированных точек и, следовательно, гомеоморфны D^ω. Находимся в условиях предыдущей леммы (отображение $p_B^{B^+}|X$ открыто как левый делитель открытого отображения $p_B|X$). Значит, отображение $p_B^{B^+}|p_{B^+}(X)$ гомеоморфно проектированию $p_B(X) \times D^\omega \to p_B(X)$.

Теперь трансфинитной индукцией построим такую последовательность u-допустимых множеств $\{B_\alpha\}_{\alpha<\tau}$, что $B_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} B_\beta$

при предельном α, $B_{\alpha+1} \supset B_\alpha^+$ для любого α, $|B_{\alpha+1} \setminus B_\alpha| = \omega$, $A = \bigcup\limits_{\alpha<\tau} B_\alpha$ (для этого и заменяем условие $B_{\alpha+1} = B_\alpha^+$ на $B_{\alpha+1} \supset$ $\supset B_\alpha^+$), $|B_1| = \omega$ и $p_{B_1}(X)$ гомеоморфно D^ω.

Полагая $X_\alpha = p_{B_\alpha}(X)$ и π_α^β равным ограничению $p_{B_\alpha}^{B_\beta}$ на X_β, получаем непрерывный спектр $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$, в котором $X_1 \approx D^\omega$ и $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ гомеоморфно проектированию $X_\alpha \times D^\omega \to X_\alpha$. Теперь по трансфинитной индукции легко показать, что $X_\alpha \approx D^{|\alpha|}$ для всякого бесконечного α. Поэтому $X_\tau = X = \lim\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$ гомеоморфно D^τ. Теорема доказана.

6.6. Теорема. *Бикомпакты* $\exp(D^{\omega_1})$ *и* $\exp_2(D^{\omega_1})$ *гомеоморфны* D^{ω_1}.

Доказательство. Согласно VII. 1.15 функторы exp и $\exp_2$ открыты. Следовательно, бикомпакты $\exp(D^{\omega_1})$ и $\exp_2(D^{\omega_1})$ раскладываются в непрерывные вполне упорядоченные спектры из компактов и открытых отображений. Тогда в силу 5.10 и 5.34 бикомпакты $\exp(D^{\omega_1})$ и $\exp_2(D^{\omega_1})$ являются пространствами Дугунджи. Они нульмерны согласно VII.2.2. Ясно также, что вес и характер бикомпактов во всех точках равен ω_1. Поэтому применение теоремы 6.5 завершает доказательство теоремы 6.6.

6.7. Теорема (Е. В. Щепин). *Бикомпакт* $\exp_2(D^{\omega_2})$ *есть пространство Милютина, не являющееся пространством Дугунджи.*

Доказательство. Забывающее порядок отображение $\sigma\colon D^{\omega_2} \times D^{\omega_2} \to \exp_2(D^{\omega_2})$ является милютинским эпиморфизмом (соответствующий ему оператор усреднения u можно определить равенством $u(\varphi)\{x, y\} = [\varphi(x, y) + \varphi(y, x)]/2$).

Далее, из IV.5.3 и VII.2.2 следует, что $\exp_2(D^{\omega_2})$ — нульмерный бикомпакт веса ω_2. Кроме того, ясно, что характер этого бикомпакта во всех точках также равен ω_2. Наконец, согласно VII.2.7. бикомпакт $\exp_2(D^{\omega_2})$ не гомеоморфен D^{ω_2}. Поэтому в силу теоремы 6.5 $\exp_2(D^{\omega_2})$ не может быть пространством Дугунджи.

Глава IX

ПРОСТРАНСТВА ЧАСТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Пространства частичных отображений

1.1. Основной объект изучения в этом параграфе — топология, определенная на множестве функций, у которых область определения не фиксирована, а пробегает множество замкнутых подмножеств некоторого топологического пространства. С рассмотрением подобного множества функций имеем дело, например, когда говорим о множестве решений обыкновенного дифференциального уравнения.

1.2. Пусть X и Y — произвольные множества, $A \subset X$. Для произвольного отображения $f\colon A \to Y$ обозначим $\pi(f) = A$, $\mathrm{Gr}(f) = \{(x,y)\colon (x,y) \in A \times Y, y = f(x)\}$, т.е. $\pi(f)$ — область определения, а $\mathrm{Gr}(f)$ — график функции f.

1.3. Пусть X — произвольное, а Y — хаусдорфово топологическое пространство, A— замкнутое подпространство пространства X, отображение $f\colon A \to Y$ непрерывно. Покажем, что множество $\mathrm{Gr}(f)$ замкнуто в пространстве $X \times Y$.

Если $(x,y) \in X \times Y \setminus \mathrm{Gr}(f)$, то либо $x \in X \setminus A$ и тогда $(X \setminus A) \times Y$ — окрестность точки (x,y), не пересекающаяся с множеством $\mathrm{Gr}(f)$, либо $x \in A$ и $y \neq f(x)$ и тогда можем взять непересекающиеся окрестности U_1 и U_2 точек y и $f(x)$. В силу непрерывности функции f найдется такая окрестность Ox точки x в пространстве X, что $f(A \cap Ox) \subset U_2$; но тогда $Ox \times U_1$ — окрестность точки (x,y), не пересекающая множество $\mathrm{Gr}(f)$. Замкнутость множества $\mathrm{Gr}(f)$ доказана.

1.4. *Частичным отображением* топологического пространства X в топологическое пространство Y назовем всякое непрерывное отображение замкнутого подпространства пространства X в пространство Y, график которого — замкнутое подмножество пространства $X \times Y$.

В силу 1.3, если пространство Y хаусдорфово, то в этом определении условие замкнутости графика функции может быть опущено.

Множество всех частичных отображений пространства X в пространство Y обозначим $C_v(X, Y)$, а множество всех частичных отображений с бикомпактными областями определения — $C_{vc}(X, Y)$.

Поставим перед собой задачу определить разумным образом топологии на этих множествах. Так как при этом $C_{vc}(X, Y) \subset \subset C_v(X, Y)$, то задача сводится к определению топологии на множестве $C_v(X, Y)$ — пространство $C_{vc}(X, Y)$ считаем подпространством пространства $C_v(X, Y)$.

Отображение $\mathrm{Gr}\colon C_v(X, Y) \to \exp(X \times Y)$ инъективно. Множество $\mathrm{Gr}(C_v(X, Y))$ является подпространством пространства $\exp(X \times Y)$, в котором определена топология Виеториса. Теперь однозначно определим топологию на множестве $C_v(X, Y)$, считая отображение $\mathrm{Gr}\colon C_v(X, Y) \to \mathrm{Gr}(C_v(X, Y))$ гомеоморфизмом.

Пространством частичных отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y (и, соответственно, пространством частичных отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y с бикомпактными областями определения) назовем множество $C_v(X, Y)$ (соответственно, множество $C_{vc}(X, Y)$) с описанной выше топологией.

1.5. Теорема. *Отображение* $\pi\colon C_v(X, Y) \to \exp X$ *непрерывно.*

Доказательство. Применяем теорему IV.8.6.

1.6. Если пространство Y состоит из одной точки, то отображение π является гомеоморфизмом. Это очевидно.

1.7. Пусть $F \in \exp X$. Обозначим $C_v^F(X, Y) = \{f\colon f \in \in C_v(X, Y), \pi(f) \supset F\}$ и $\Phi^F(f) = f|_F$ для $f \in C_v^F(X, Y)$.

Таким образом, определено отображение $\Phi^F\colon C_v^F(X, Y) \to \to C(F, Y)$, где, как и в пятой главе, $C(F, Y)$ обозначает пространство непрерывных отображений подпространства F в пространство Y, взятое с бикомпактно-открытой топологией.

В пространстве $C_v^F(X,Y)$ лежит подпространство $C_*^F(X,Y) = C_v(X,Y) \cap \pi^{-1}(F)$. Если X есть T_1-пространство, то из теорем 1.5 и IV.3.5 следует, что подпространство $C_*^F(X,Y)$ замкнуто в пространстве $C_v(X,Y)$.

1.8. Теорема. *Пусть пространство X хаусдорфово и $F \in \exp X$. Тогда отображение $\Phi^F\colon C_v^F(X,Y) \to C(F,Y)$ непрерывно.*

Доказательство. Элемент стандартной предбазы пространства $C(F,Y)$ имеет вид $O(K,U)$ (см. V.2.1), где K — бикомпактное подмножество пространства X, U — открытое подмножество пространства Y. Пусть $f_1 \in C_v^F(X,Y)$ и $\Phi^F(f_1) \in \in O(K,U)$.

В силу непрерывности отображения f_1 множество $V_1 = = f_1^{-1}(U)$ открыто в области определения X_1 отображения f_1, и поэтому найдется открытое в пространстве X множество V, для которого $V \cap X_1 = V_1$. Рассмотрим семейство

$$\omega = \begin{cases} \{V \times U, (X \setminus K) \times Y\}, & \text{если } X_1 \setminus V_1 \neq \varnothing; \\ \{V \times U\}, & \text{если } X_1 = V_1. \end{cases}$$

По определению топологии Виеториса в пространстве $\exp(X \times Y)$ и заданию топологии в пространстве $C_v^F(X,Y)$ множество W всех тех функций $f \in C_v^F(X,Y)$, графики которых покрываются семейством ω и задевают каждый его элемент, открыто в пространстве $C_v^F(X,Y)$. Заметим теперь, что $\mathrm{Gr}(f_1|_K) \subset V \times U$ и поэтому $f_1 \in W$. С другой стороны, для произвольного элемента f множества W мы имеем $\mathrm{Gr}(f|_K) \cap \cap ((X \setminus K) \times Y) = \varnothing$ и поэтому $f(K) \subset U, \Phi^F(f) \in O(K,U)$.

Ввиду произвольности элемента $f \in W$ это означает, что $\Phi^F(W) \subset O(K,U)$, а ввиду произвольности функции $f_1 \in (\Phi^F)^{-1}(O(K,U))$ отсюда следует, что множество $(\Phi^F)^{-1}(O(K,U))$ открыто. Теперь доказываемое утверждение следует из теоремы I.1.19.

1.9. Следствие. *В предложениях теоремы* 1.8 *тождественное отображение $C_*^F(X,Y) \to C(F,Y)$ непрерывно.*

1.10. Теорема. *Пусть пространства X и Y хаусдорфовы и $F \in \exp_c X$. Тогда тождественное отображение $C_*^F(X,Y) \to C(F,Y)$ — гомеоморфизм.*

Доказательство. Непрерывность отображения установлена в следствии 1.9. Из 1.3 следует, что определено обратное отображение. Докажем его непрерывность. Учитывая наш способ задания топологии на пространстве $C^F_*(X,Y)$, задача сводится к доказательству непрерывности отображения $\mathrm{Gr}\colon C(F,Y) \to \to \exp_c(X \times Y)$. В силу предложения I.1.19 нам надо проверить открытость прообразов элементов стандартной предбазы топологии Виеториса (см. IV.3.1–3.2), т. е. прообразов множеств вида $O\langle U\rangle$ и $O\langle U, X \times Y\rangle$, где U — открытое подмножество пространства $X \times Y$. Пусть $f_1 \in C(F,Y)$.

Пусть $\mathrm{Gr}(f_1) \in O\langle U\rangle$, т. е. $\mathrm{Gr}(f_1) \subset U$. В силу бикомпактности множества $\mathrm{Gr}(f_1)$ можем построить конечное семейство $\{U_1 \times V_1, \ldots, U_m \times V_m\}$ открытых в произведении $X \times Y$ множеств, лежащих в множестве U, покрывающее $\mathrm{Gr}(f_1)$. Семейство $\{U_1 \cap f_1^{-1}(V_1), \ldots, U_m \cap f_1^{-1}(V_m)\}$ покрывает бикомпакт F и состоит из открытых в бикомпакте F подмножеств. Впишем поэлементно в это семейство покрытие $\{K_1, \ldots, K_m\}$ бикомпакта F замкнутыми множествами — такое существует по II.5.4. Для любого $i = 1, \ldots, m$ имеем $f_1(K_i) \subset V_i$ и, следовательно, $f_1 \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} O(K_i, V_i)$. С другой стороны, для любой функции $f \in \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} O(K_i, V_i)$ и любой точки $x \in F$ для некоторого $i = 1, \ldots, m$ $x \in K_i$, $f(x) \in V_i$, $(x, f(x)) \in K_i \times V_i \subset U_i \times V_i \subset U$, поэтому $\mathrm{Gr}(f) \subset U$. Таким образом, $\mathrm{Gr}(\bigcap\limits_{i=1}^{m} O(K_i, V_i)) \subset O\langle U\rangle$, из чего ввиду произвола в выборе точки $f_1 \in \mathrm{Gr}^{-1}(O\langle U\rangle)$ следует, что множество $\mathrm{Gr}^{-1}(O\langle U\rangle)$ открыто.

Пусть $\mathrm{Gr}(f_1) \in O\langle U, X \times Y\rangle$. Зафиксируем точку $x \in F$, для которой $(x, f_1(x)) \in U$. Множество $V = \{y\colon y \in Y, (x,y) \in \in U\}$ открыто в пространстве Y. Имеем $f_1 \in O(\{x\}, V)$ и $\mathrm{Gr}(O(\{x\}, V)) \subset O\langle U, X \times Y\rangle$, откуда ввиду произвола и выборе точки $f_1 \in \mathrm{Gr}^{-1}(O\langle U, X \times Y\rangle)$ следует, что множество $\mathrm{Gr}^{-1}(O\langle U, X \times Y\rangle)$ открыто. Теорема доказана.

1.11. Заметим, что доказанная теорема довольно определенно характеризует положение описанной топологии пространства частичных отображений: она объединяет в единое целое пространства отображений, определенных на (фиксированных для каждого пространства) бикомпактных подпространствах пространства X с бикомпактно-открытой топологией.

1.12. Теорема. *Пусть пространство Y метризуемо. Тогда множество $\mathrm{Gr}(C_{vc}(X,Y))$ является C_δ-подмножеством пространства $\exp_c(X \times Y)$.*

Доказательство. I. Зафиксируем некоторую метрику ρ на пространстве Y. Отнесем к множеству H_n все те бикомпактные подмножества M произведения $X \times Y$, которые удовлетворяют следующему условию: найдутся такие точки $x \in X$ и $y_1, y_2 \in Y$, что $(x, y_1), (x, y_2) \in M$, $\rho(y_1, y_2) \geqslant 1/n$.

II. Докажем, что $\mathrm{Gr}(C_{vc}(X,Y)) \cap [H_n] = \varnothing$.

Пусть $f \in C_{vc}(X,Y)$, $F \in \exp_c X$ — область определения функции f. Поставим в соответствие каждой точке $x \in F$ такую ее окрестность Ox в пространстве X, что для любой точки $t \in$ $\in [Ox] \cap F$ $\rho(f(t), f(x)) < 1/4n$.

Из открытого покрытия $\{Ox \colon x \in F\}$ бикомпакта F выберем конечное подпокрытие $\{Ox_1, \ldots, Ox_s\}$ и положим $F_1 = \cup\{[Ox_p] \cap$ $\cap [Ox_q] \colon p, q = 1, \ldots, s, [Ox_p] \cap [Ox_q] \cap F = \varnothing\}$, $W_1 = Ox_1 \setminus F_1, \ldots$ $\ldots, W_s = Ox_s \setminus F_1$.

Пусть для $i = 1, \ldots, s$ $U_i = W_i \times O_{1/4n} f(x_i)$, $\omega = \{U_1, \ldots, U_s\}$, $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$, $(x, y_1), (x, y_2) \in \cup\omega$.

При некоторых i, j $(x, y_1) \in U_i$, $(x, y_2) \in U_j$. Поэтому $x \in W_i \cap$ $\cap W_j$, $[Ox_i] \cap [Ox_j] \cap F \neq \varnothing$ и найдется точка $t \in [Ox_i] \cap [Ox_j] \cap$ $\cap F$. Имеем

$$\rho(f(x_i), f(x_j)) \leqslant \rho(f(x_i), f(t)) + \rho(f(t), f(x_j)) < \frac{1}{2n},$$

$$\rho(y_1, y_2) \leqslant \rho(y_1, f(x_i)) + \rho(f(x_i), f(x_j)) + \rho(f(x_j), y_2) <$$

$$< \frac{1}{4n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} = \frac{1}{n}.$$

Отсюда следует, что любое бикомпактное подмножество пространства $X \times Y$, покрытое семейством ω, не принадлежит множеству H_n, и, следовательно, множество $O(U_1, \ldots, U_s)$ — виеторисовская окрестность точки $\mathrm{Gr}(f)$, не задевающая множества H_n.

III. Покажем, что $\mathrm{Gr}(C_{vc}(X,Y)) \supset \exp_c(X \times Y) \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$.

В самом деле, из определения множеств H_n, $n = 1, 2, \ldots$, следует, что множество $\exp_c(X \times Y) \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$ состоит из тех бикомпактов $F \subset X \times Y$, которые удовлетворяют условию: если $z_1, z_2 \in F$ и $p(z_1) = p(z_2)$, то $z_1 = z_2$, где $p\colon X \times Y \to X$ обозначает проектирование произведения $X \times Y$ на первый сомножитель.

Но выполнение этого условия означает взаимную однозначность отображения $p|_F\colon F \to p(F)$, откуда ввиду бикомпактности множества F вытекает по теореме I.4.19, что отображение $p|_F\colon F \to p(F)$ — гомеоморфизм и поэтому обратное к нему отображение $g\colon p(F) \to F$ непрерывно. Пусть $q\colon X \times Y \to Y$ — проектирование на второй сомножитель, $f = qg\colon p(F) \to Y$. Теперь, очевидно, $F = \mathrm{Gr}(f)$, что и означает выполнение III.

IV. По II и III

$$\mathrm{Gr}(C_{vc}(X,Y)) \subset \exp_c(X \times Y) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} [H_n] \subset$$
$$\subset \exp_c(X \times Y) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \subset \mathrm{Gr}(C_{vc}(X,Y)).$$

Таким образом, $\mathrm{Gr}(C_{vc}(X,Y)) = \exp_c(X \times Y) \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [H_n]$. Теорема доказана.

1.13. Замечание. Если X и Y — метризуемые пространства, то по теореме IV.7.3 пространство $\exp_c(X \times Y)$ метризуемо. Отсюда следует метризуемость пространства $C_{vc}(X,Y)$. Если X и Y — полные метрические пространства, то по теореме IV.7.5 пространство $\exp_c(X \times Y)$ метризуемо полной метрикой. Из теорем 1.12 и I.3.36 теперь следует, что пространство $C_{vc}(X,Y)$ может быть метризовано полной метрикой. Для подпространства $C_*^F(X,Y)$, где $F \in \exp_c X$, имеем полную метрику в виде метрики равномерной сходимости.

Топология метризуемого пространства достаточным образом описывается последовательностями. Некоторые особенности сходимости в пространстве $C_v(X,Y)$ в случае метризуемых пространств X и Y улавливает

1.14. Теорема. *Пусть пространства X и Y метризуемы,* $\{z_n\colon n = 0, 1, 2, \ldots\} \subset C_v(X,Y)$, $z_n \to z_0$, $\{K_n\colon n =$

$= 0, 1, 2, \ldots\} \subset \exp X$, $K_n \to K_0$, $K_n \subset \pi(z_n)$ *при* $n = 1, 2, \ldots$ *Тогда*

$$K_0 \subset \pi(z_0) \text{ и } z_n|_{K_n} \to z_0|_{K_0}.$$

Доказательство. Включение $K_0 \subset \pi(z_0)$ следует из теоремы 1.5 и IV.3.11.

Множества вида $O\langle V\rangle$ и $O\langle V, X \times Y\rangle$, где V — открытое подмножество пространства $X \times Y$, составляют предбазу топологии пространства $\exp(X \times Y)$, поэтому для доказательства сходимости $z_n|_{K_n} \to z_0|_{K_0}$ достаточно показать, что для любой окрестности вида $O\langle V\rangle$ или $O\langle V, X \times Y\rangle$ точки $\mathrm{Gr}(z_0|_{K_0})$ найдется такое целое число N, что для любого целого $n \geqslant N$ $\mathrm{Gr}(z_n|_{K_n}) \in O\langle V\rangle$, или соответственно $\mathrm{Gr}(z_n|_{K_n}) \in O\langle V, X \times Y\rangle$.

Итак, пусть $\mathrm{Gr}(z_0|_{K_0}) \in O\langle V\rangle$. Проектирование $p\colon X \times Y \to X$ произведения $X \times Y$ на первый сомножитель осуществляет гомеоморфизм подпространства $\mathrm{Gr}(z_0)$ на подпространство $\pi(z_0)$, поэтому множество $A = p(\mathrm{Gr}(z_0) \setminus V)$ замкнуто в пространстве X. При этом $K_0 \cap A = \varnothing$. Если $A = \varnothing$, то $\mathrm{Gr}(z_0) \subset V$ и, начиная с некоторого n,

$$\mathrm{Gr}(z_n|_{K_n}) \subset \mathrm{Gr}(z_n) \subset V, \quad \mathrm{Gr}(z_n|_{K_n}) \in O\langle V\rangle.$$

Если $A \neq \varnothing$, то зафиксируем непересекающиеся окрестности W_1 и W_2 множеств K_0 и A соответственно в пространстве X. Пусть $V_2 = W \times Y$. Тогда $\mathrm{Gr}(z_0) \in O\langle V, V_2\rangle$ и, начиная с некоторого n $\mathrm{Gr}(z_n) \in O\langle V, V_2\rangle$, $K_n \subset W_1$. Из последнего условия следует, что $K_n \cap W_2 = \varnothing$ и $\mathrm{Gr}(z_n|_{K_n}) \cap V_2 = \varnothing$. Но $\mathrm{Gr}(z_n|_{K_n}) \subset \mathrm{Gr}(z_n) \subset V \cup V_2$. Сопоставляя, получаем

$$\mathrm{Gr}(z_n|_{K_n}) \subset V, \mathrm{Gr}(z_n|_{K_n}) \in O\langle V\rangle.$$

Пусть теперь $\mathrm{Gr}(z_0|_{K_0}) \in O\langle V, X \times Y\rangle$.

Если $\mathrm{Gr}(z_0|_{K_0}) \subset V$, то $\mathrm{Gr}(z_0|_{K_0}) \in O\langle V\rangle \subset O\langle V, X \times Y\rangle$, а этот случай уже рассмотрен.

Пусть $\mathrm{Gr}(z_0|_{K_0}) \setminus V \neq \varnothing$. Зафиксируем точку (x_0, y_0) множества $\mathrm{Gr}(z_0|_{K_0}) \cap V$ и непересекающиеся окрестности W_1 и W_2 точки x_0 и множества $A = p(\mathrm{Gr}(z_0) \setminus V)$. Пусть $V_2 = W_2 \times Y$.

В силу условий $z_n \to z_0$, $\mathrm{Gr}(z_0) \in O\langle V, V_2\rangle$, $K_n \to K_0$, $K_0 \in O\langle W_1, X\rangle$ найдется такое целое число N, что для любого целого $n \geqslant N$ $\mathrm{Gr}(z_n) \in O\langle V, Y_2\rangle$, $K_n \in O\langle W_1, X\rangle$. Возьмем произвольно точку $X \in K_n \cap W_1$. В силу того, что $W_1 \cap W_2 = \varnothing$, имеем $x \notin W_2$, $(x, z_n(x)) \notin V_2$. Но $(x, z_n(x)) \notin \mathrm{Gr}(z_n) \subset V \cup V_2$, поэтому $(x, z_n(x)) \in V$ и $\mathrm{Gr}(z_n|_{K_n}) \cap V \neq \varnothing$, т.е. $\mathrm{Gr}(z_n|_{K_n}) \in \in O\langle V, X \times Y\rangle$. Теорема доказана.

1.15. Рассмотрим частный случай пространства частичных отображений, когда в качестве пространства X взята действительная прямая, а в качестве пространства Y — конечномерное евклидово пространство $L = \mathbb{R}^n$. Пусть U — область (употребляем этот термин как синоним термина открытое множество), лежащая в произведении $\mathbb{R} \times L$. Обозначим $C_s(U)$ множество всех непрерывных отображений, определенных на всевозможных конечных отрезках действительной прямой, со значениями в пространстве L, графики которых лежат в области U. При этом одноточечные множества также причисляем к отрезкам. В силу теоремы IV.8.8 множество P всех (конечных) отрезков замкнуто в пространстве $\exp_c \mathbb{R}$. Для множества $C_s(U)$ имеем представление $C_s(U) = \{f\colon f \in C_{vc}(\mathbb{R}, L), \mathrm{Gr}(f) \subset U, \pi(f) \in P\}$, из которого следует, что $C_s(U)$ является C_δ-множеством в пространстве $C_{vc}(\mathbb{R}, L)$. Рассматриваем пространство $C_s(U)$ с топологией, индуцированной из пространства $C_{vc}(\mathbb{R}, L)$ (т. е. считаем $C_s(U)$ подпространством пространства $C_{vc}(\mathbb{R}, L)$). В силу сделанных замечаний и доказанных ранее теорем пространство $C_s(U)$ сепарабельно и может быть метризовано полной метрикой.

Зафиксируем (конечный) отрезок I действительной прямой и положим $C_s(U, I) = C_s(U) \cap \pi^{-1}(I)$. Из теорем 1.10 и V.2.3 следует, что топология подпространства $C_s(U, I)$ порождается метрикой равномерной сходимости.

1.16. Теорема. *Отображение $I\colon C_s(\mathbb{R} \times L) \to L$, сопоставляющее функции $y \in C_s(\mathbb{R} \times L)$ вектор $\int\limits_a^b y(t)dt$, где $[a, b] = \pi(y)$, непрерывно.*

Доказательство. I. Возьмем произвольно $y_0 \in C_s(\mathbb{R} \times \times L)$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $\pi(y_0) = [a_0, b_0]$. Пусть V — открытый шар в пространстве L с центром в точке $0 \in L$ и радиусом $M > > 0$, содержащий множество $y_0([a_0, b_0])$. В силу непрерывности отображения π найдется такая окрестность $O_1 y_0$ точки y_0 в пространстве $C_s(\mathbb{R} \times L)$, для любого элемента y которой $y([a, b]) \subset \subset V$, $|a_0 - a| < \varepsilon/8M$, $|b_0 - b| < \varepsilon/8M$, где $[a, b] = \pi(y)$.

II. Если $a_0 = b_0$, то для $y \in O_1 y_0$

$$\left\| \int_{a_0}^{b_0} y_0(t)dt - \int_a^b y(t)dt \right\| = \left\| \int_a^b y(t)dt \right\| \leqslant \frac{2\varepsilon}{8M} \cdot M < \varepsilon.$$

III. Пусть $a_0 < b_0$. Выберем точки a_1 и b_1 так, чтобы выполнялось: $a_0 < a_1 < b_1 < b_0$, $|a_0 - a_1| < \varepsilon/8M$, $|b_0 - b_1| < \varepsilon/8M$.

В силу непрерывности отображения π найдется такая окрестность $O_2 y_0$ точки y_0 в пространстве $C_s(\mathbb{R} \times L)$, что для любой функции $y \in O_2 y_0$ $a < a_1$ и $b_1 < b$, где, как и раньше, $[a, b] = \pi(y)$.

Для $y \in O_1 y_0 \cap O_2 y_0$ верно

$$\left\| \int_{a_0}^{b_0} y_0(t)dt - \int_a^b y(t)dt \right\| \leqslant \left\| \int_{a_1}^{b_1} (y_0(t) - y(t))dt \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{a_0}^{a_1} y_0(t)dt \right\| + \left\| \int_{b_1}^{b_0} y_0(t)dt \right\| + \left\| \int_a^{a_1} y(t)dt \right\| + \left\| \int_{b_1}^{b} y(t)dt \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_{a_1}^{b_1} (y_0(t)dt - y(t))dt \right\| + |a_1 - a_0| \cdot M + |b_1 - b_0| \cdot M +$$

$$+ |a_1 - a| \cdot M + |b_1 - b| \cdot M < \left\| \int_{a_1}^{b_1} (y_0(t)dt - y(t))dt \right\| + \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Из теоремы 1.10 и замечания, предшествующего формулировке настоящей теоремы, следует, что найдется такая окрестность $O_3 y_0$ точки y_0 в пространстве $C_s(\mathbb{R} \times L)$, что для любой функции $y \in O_3 y_0$ и любой точки $t \in [a_1, b_1]$ $\|y_0(t) - y(t)\| < \varepsilon/4(b_1 - a_1)$, поэтому для любой функции $y \in O_1 y_0 \cap O_2 y_0 \cap O_3 y_0$

$$\left\| \int_{a_1}^{b_1} (y_0(t)dt - y(t))dt \right\| \leqslant \int_{a_1}^{b_1} \|y_0(t) - y(t)\| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4(b_1 - a_1)} (b_1 - a_1) = \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\|I(y_0) - I(y_1)\| = \left\| \int\limits_{a_0}^{b_0} y_0(t)dt - \int\limits_a^b y(t)dt \right\| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{3\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

что и означает непрерывность отображения I. Теорема доказана.

1.17. Замечание. Пусть в обозначениях 1.16 $J(y) = \frac{1}{b-a}I(y)$, если $b \neq a$, и $J(y) = y$, если $b = a$. Тогда отображение $J\colon C_s(\mathbb{R} \times L) \to L$ непрерывно.

Непрерывность отображения J в точке $y_0 \in C_s(\mathbb{R} \times L)$, для которой $b_0 \neq a_0$, где $[a_0, b_0] = \pi(y_0)$, непосредственно следует из теоремы 1.16, непрерывности отображения π и операции деления вектора на числа, отличные от нуля.

Пусть $b_0 = a_0$. В обозначениях п. II доказательства теоремы 1.16 при $a = b$

$$\|J(y) - J(y_0)\| = \|y - y_0\| \leqslant h(\mathrm{Gr}(y), \mathrm{Gr}(y_0)),$$

где h — метрика Хаусдорфа. При $a \neq b$

$$\|J(y) - J(y_0)\| \leqslant \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b \|(y(t) - y_0(a_0)\| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b h(\mathrm{Gr}(y), \mathrm{Gr}(y_0))dt = h(\mathrm{Gr}(y), \mathrm{Gr}(y_0)).$$

Из этих оценок следует непрерывность отображения J во втором случае.

§ 2. Компактность в пространстве частичных отображений

2.1. Понятие равностепенной непрерывности очевидным образом распространяется на множества функций, лежащие в пространстве частичных отображений, а именно: множество Z, лежащее в пространстве $C_v(X, Y)$ частичных отображений метрического пространства (X, ρ) в метрическое пространство (Y, d), называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой функции $z \in Z$ и любых точек $x_1, x_2 \in \pi(z)$, если $\rho(x_1, x_2) < \delta$, то $d(z(x_1), z(x_2)) < \varepsilon$.

Как и в случае метрики равномерной сходимости на пространстве функций с фиксированной областью определения, равностепенная непрерывность оказывается тесным образом связанной с компактностью.

2.2. Теорема. *Пусть (X, ρ) и (Y, d) — метрические пространства, Z — компактное подмножество пространства $C_{vc}(X, Y)$. Тогда множество Z равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Уже отмечалось в 1.13, что в этих предположениях пространство $C_{vc}(X, Y)$ метризуемо.

Допустим, что множество Z не является равностепенно непрерывным. Это означает, что найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $i = 1, 2, \ldots$ найдутся функция $z_i \in Z$ и точки $s_i, t_i \in \pi(z_i)$, для которых $\rho(s_i, t_i) < 1/i$, $d(z_i(s_i), z_i(t_i)) \geqslant \varepsilon$.

В силу компактности (и метризуемости) множества Z дополнительно предположим, что последовательность $\{z_i \colon i = 1, 2, \ldots\}$ сходится к некоторой функции $z \in Z$. Из теорем VI.8.2 и VI.7.10 следует компактность множества $\cup\pi(Z)$, и поэтому дополнительно предположим, что последовательности $\{s_i \colon i = 1, 2, \ldots\}$ и $\{t_i \colon i = 1, 2, \ldots\}$ сходятся соответственно к точкам s и t — в противном случае перейдем к подпоследовательности, удовлетворяющей всем этим условиям. Из теоремы 1.14 следует, что

$$(s_i, z_i(s_i)) \to (s, z(s)), \quad ((t_i, z_i(t_i)) \to (t, z(t)),$$

а так как $\rho(s_i, t_i) \to 0$, то $s = t$ и, следовательно, $z(s) = z(t)$. Но, с другой стороны, $d(z(s), z(t)) = \lim\limits_{i \to \infty} d(z_i(s_i), z_i(t_i)) \geqslant \varepsilon$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Обращение доказанной теоремы составляет содержание теоремы Арцела, которая для рассматриваемого случая пространства частичных отображений звучит следующим образом.

2.3. Теорема. *Пусть K — компактное подмножество произведения $X \times Y$ метрических пространств (X, ρ) и (Y, d), $\{z_n \colon n = 1, 2, \ldots\}$ — равностепенно непрерывная последовательность элементов пространства $C_v(X, Y)$, графики которых лежат в компакте K. Тогда последовательность $\{z_n \colon n = 1, 2, \ldots\}$ содержит сходящуюся в пространстве $C_v(X, Y)$ подпоследовательность.*

Доказательство. I. Отметим сначала, что, так как графики всех функций z_n, $n = 1, 2, \ldots$, лежат в компакте K, получаем $\{z_n : n = 1, 2, \ldots\} \subset C_{vc}(X, Y)$. Отображение $\mathrm{Gr}\colon C_{vc}(X, Y) \to \to \exp_c(X \times Y)$ — вложение, причем $\{\mathrm{Gr}(z_n) : n = 1, 2, \ldots\} \subset \subset \exp K$. По теоремам IV.5.1 и IV.7.3 пространство $\exp K$ — (метризуемый) компакт, поэтому из последовательности $\{\mathrm{Gr}(z_n) : n = = 1, 2, \ldots\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $F \in \exp K$. Сохраним для выбранной подпоследовательности старые обозначения, т. е. считаем, что $\mathrm{Gr}(z_n) \to F$.

II. Покажем, что множество F обладает следующим свойством «равномерной непрерывности»:

для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) множества $F \subset X \times Y$, если $\rho(x_1, x_2) < \delta$, то $d(y_1, y_2) < \varepsilon$.

В самом деле, в силу равностепенной непрерывности последовательности $\{z_n : n = 1, 2, \ldots\}$ для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого $n = 1, 2, \ldots$ и любых $s, t \in \pi(z_n)$, $\rho(s, t) < \delta$ имеем $d(z_n(s), z_n(t)) < \varepsilon/2$.

В соответствии с теоремой IV.3.9 построим такие последовательности $\{s_n : n = 1, 2, \ldots\}$ и $\{t_n : n = 1, 2, \ldots\}$, $s_n, t_n \in \pi(z_n)$, что $(s_n, z_n(s_n)) \to (x_1, y_1)$, $(t_n, z_n(t_n)) \to (x_2, y_2)$. Имеем $s_n \to \to x_1$, $t_n \to x_2$, поэтому найдется такое число N, что для любого натурального $n \geqslant N$

$$\rho(s_n, x_1) < \frac{1}{2}(\delta - \rho(x_1, x_2)), \quad \rho(t_n, x_2) < \frac{1}{2}(\delta - \rho(x_1, x_2))$$

и поэтому

$$\rho(s_n, t_n) \leqslant \rho(s_n, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, t_n) <$$
$$< \frac{1}{2}(\delta - \rho(x_1, x_2)) + \rho(x_1, x_2) + \frac{1}{2}(\delta - \rho(x_1, x_2)) = \delta,$$
$$d(z_n(s_n), z_n(t_n)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $z_n(s_n) \to y_1, z_n(t_n) \to y_2$, то $d(y_1, y_2) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$.

III. Если в II возьмем точки $(x, y_1), (x, y_2) \in F$, у которых первые координаты совпадают, то получим, что при любом $\varepsilon > > 0$ $d(y_1, y_2) < \varepsilon$, т. е. $y_1 = y_2$. Это означает, что множество F — график некоторой функции z (см. п. III доказательства теоремы

1.12). В силу компактности множества F область определения функции z компактна. Из II следует, что функция z непрерывна. Таким образом, $z \in C_{vc}(X, Y)$. В топологии пространства $\exp_c(X \times Y)$ имеем сходимость $\mathrm{Gr}(z_n) \to F = \mathrm{Gr}(z)$. Вспоминая теперь, что отображение Gr является вложением, получаем $z_n \to \to z$. Теорема доказана.

2.4. З а м е ч а н и е. Из доказанной теоремы следует, что замыкание произвольного равностепенно непрерывного множества компактно в пространстве частичных отображений, если графики функций, составляющих рассматриваемое множество, лежат в фиксированном компакте. Если теперь дополнительно предположить, что наше множество замкнуто в пространстве частичных отображений, то оно само оказывается компактным. Это мы и подразумевали, говоря, что теорема 2.3 является обращением теоремы 2.2.

Если в теореме 2.3 ограничимся рассмотрением функций с фиксированной областью определения, то получим теорему Арцела в ее классической формулировке.

2.5. В дальнейшем нас интересует свойство типа компактности (см. ниже условие 4) подпространств пространства $C_s(U)$, несущих дополнительные структуры, соответствующие простейшим свойствам множеств решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Перечислим эти свойства. Пусть $Z \subset C_s(U)$.

1. Если $z \in Z$ и отрезок I лежит в области определения функции z, то $z|_I \in Z$.

2. Если области определения функций z_1, $z_2 \in Z$ пересекаются и функции совпадают на множестве $\pi(z_1) \cap \pi(z_2)$, то заданная на множестве $\pi(z_1) \cup \pi(z_2)$ функция

$$z(t) = \begin{cases} z_1(t) \text{ при } t \in \pi(z_1); \\ z_2(t) \text{ при } t \in \pi(z_2) \end{cases}$$

также принадлежит множеству Z.

3. Множество Z содержит все функции, определенные на одноточечных подмножествах и имеющие графики, лежащие в области U, и если функция $z \in C_s(U)$ определена на отрезке $[a, b]$, $a < b$, и найдутся последовательности $\{a_n \colon n = 1, 2, \ldots\}$

и $\{b_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ точек отрезка $[a, b]$, $a_n < b_n$, сходящиеся к точкам a и b соответственно, такие, что $z|_{[a_n, b_n]} \in Z$, то $z \in Z$.

4. Для любого компактного подмножества K области U множество $\{z\colon z \in Z, \mathrm{Gr}(z) \subset K\}$ компактно (в топологии пространства $C_s(U)$).

5. Для любой точки (t, y) области U найдется функция, принадлежащая множеству Z, определенная на некотором отрезке, содержащем точку t внутри себя, и принимающая значение y в точке t.

6. Для любой точки (t, y) области U найдется такое число $\delta > 0$, что для любой точки $s \in (t - \delta, t + \delta)$ множество $\{z(s)\colon z \in Z, s, t \in \pi(z), z(t) = y\}$ связно.

Когда речь идет о множествах решений обыкновенных дифференциальных уравнений, то выполнение свойств 1–3 обычно бывает очевидным, если понятие решения определено должным образом. Свойства 4–6 имеют более специальный характер, и их выполнение для конкретных уравнений надо доказывать дополнительно. Свойство 5 при этом соответствует теореме существования. Свойство 4 — наиболее удобная для наших целей форма выражения следующего постоянно используемого в теории обыкновенных дифференциальных уравнений свойства: при определенных условиях из последовательности решений можно выделить сходящуюся подпоследовательность. (Его можно считать псевдонимом условия непрерывности зависимости решений от начальных условий в ситуации, когда единственность решения задачи Коши не предполагается, см. § 3). Свойство 6 соответствует теореме Кнезера, и его выполнение обсудим ниже.

Множество всех пространств $Z \subset C_s(U)$, удовлетворяющих условиям

1и 2	обозначим R(U),
1, 2 и 3	обозначим $R_p(U)$,
1, 2 и 4	обозначим $R_c(U)$,
1, 2 и 5	обозначим $R_e(U)$,
1, 2, 4 и 5	обозначим $R_{ce}(U)$,
1, 2, 4, 5 и 6	обозначим $R_{cek}(U)$.

Ниже покажем, что многие свойства пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений выполняются для всех элементов множества $R_{ce}(U)$. Встает вопрос, имеются ли возможности доказывать принадлежность пространства решений уравнения этому множеству, кроме применения обычных теорем теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие возможности появляются.

Пусть для $M \subset U$ и $Z \subset C_s(U)$

$$Z_M = \{z\colon z \in Z, \mathrm{Gr}(z) \subset M\}.$$

Пусть $Z \in R(U)$ и γ — семейство открытых подмножеств области U, для любого элемента V которого $Z_V \in R_{ce}(V)$. Оказывается, при некоторых дополнительных ограничениях, в частности, на геометрические свойства множества $F = U \setminus \cup\gamma$, можно доказать, что $Z \in R_{ce}(U)$. В дальнейшем приведем примеры результатов этого типа.

2.6. Теорема. *Пусть $Z \in R_p(U)$ и для любого компактного подмножества K области U и любого отрезка I множество $Z_K \cup \pi^{-1}(I)$ замкнуто в пространстве $C_s(U)$, а множество Z_K — равностепенно непрерывно. Тогда $Z \in R_c(U)$.*

Доказательство. Пусть $K \in \exp_c U$ и $\{z_i\colon i = 1, 2, \ldots\} \in$ $\in Z_K$. Покажем, что из нашей последовательности можно выбрать сходящуюся в подпространстве Z_K подпоследовательность. Из условий доказываемой теоремы следует, что рассматриваемая последовательность равностепенно непрерывна и поэтому в силу теоремы 2.3 дополнительно предположим, что она сходится к некоторой функции $z \in C_s(U)$(в противном случае переходим к подпоследовательности, удовлетворяющей этому условию). Имеем $\mathrm{Gr}(z) \subset K$. Пусть $[a, b] = \pi(z)$.

Если $a = b$, то по определению множества $R_p(U)$, $z \in Z$.

Рассмотрим теперь случай, когда $a < b$, и возьмем произвольно $\varepsilon \in (0, (b-a)/2)$.

В силу непрерывности отображения π, начиная с некоторого i $\pi(z_i) \supset [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, и по теореме 1.14

$$(*) \quad z_i|_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} \to z|_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}.$$

Но $z_i|_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} \in Z_K \cap \pi^{-1}([a+\varepsilon, b-\varepsilon])$, и поэтому из замкнутости множества $Z_K \cap \pi^{-1}([a+\varepsilon, b-\varepsilon])$ и $(*)$ следует, что $z|_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} \in Z$.

Из определения множества $R_p(U)$ следует, что $z \in Z$.

Из произвольности компакта $K \in \exp_c U$ теперь следует, что $Z \in R_c(U)$. Теорема доказана.

2.7. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(t, y)$, где функция f определена и непрерывна в области $U \subset \mathbb{R} \times \times L$. Функцию $y\colon [a, b] \to L$ назовем решением этого уравнения, если ее график лежит в области U и либо $a = b$, либо $a < b$, и на интервале (a, b) функция удовлетворяет рассматриваемому уравнению $y(t)$ и $f(t, y(t))$ являются элементами пространства L. Пусть $y = (y_1, \dots, y_n)$, $f(t, y) = (f_1(t, y), \dots, f_n(t, y))$.

Покажем теперь, что если решение $y(t)$ определено на отрезке $[a, b]$, $a < b$, то оно удовлетворяет уравнению на всем отрезке $[a, b]$, т. е. в концевых точках существуют соответствующие односторонние производные, удовлетворяющие рассматриваемому уравнению. Применяя формулу Лагранжа, получаем для $i = 1, \dots \dots, n$ и точки $t \in (a, b]$

$$\frac{y_i(t) - y_i(a)}{t - a} = y_i'(c) = f_i(c, y(c)),$$

где точка c принадлежит отрезку $[a, t]$. Устремляя теперь t к a, получаем $y_i'(a) = f_i(a, y(a))$, или, возвращаясь к векторной форме записи, $y'(a) = f(a, y(a))$. Аналогично, $y'(b) = f(b, y(b))$.

Из определения решения и доказанного утверждения следует, что пространство Z всех решений нашего уравнения удовлетворяет условиям 1, 2 и 3 п. 2.5, т. е. принадлежит множеству $R_p(U)$.

Для доказательства принадлежности пространства решений множеству $R_c(U)$ воспользуемся теоремой 2.6. Условие замкнутости множества $Z_K \cap \pi^{-1}(I)$ можно прочитать таким образом: если последовательность $\{z_i\colon i = 1, 2, \dots\}$ определенных на отрезке I решений равномерно сходится к функции z, график которой лежит в области U, то функция z также является решением, а это — хорошо известное свойство решений обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными правыми частями. Докажем равностепенную непрерывность множества Z_K. Положим $m = \max\{\|f(t, y)\|, (t, y) \in K\}$ и рассмотрим произвольное решение $y \in Z_K$. Если $t_1, t_2 \in \pi(y)$, то по теореме Лагранжа

$$|y_i(t_2) - y_i(t_1)| = |y_i'(c)||t_2 - t_1| = \\ = |f_i(c, y(c))||t_2 - t_1| \leqslant m|t_2 - t_1|,$$

поэтому $\|y(t_2)-y(t_1)\|=\sqrt{|y_1(t_2)-y_1(t_1)|^2+\ldots+|y_n(t_2)-y_n(t_1)|^2}\leqslant \leqslant m\sqrt{n}\,|t_2-t_1|$, а отсюда сразу следует равностепенная непрерывность множества Z_K (в обозначениях определения 2.1 для данного $\varepsilon > 0$ берем $\delta = \varepsilon/m\sqrt{n}$). Таким образом, $Z \in \in R_c(U)$.

Принадлежность пространства решений множеству $R_e(U)$ составляет содержание теоремы существования (в данном случае — теоремы Пеано).

Таким образом, мы показали, что пространство решений обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(t, y)$ с непрерывной правой частью принадлежит множеству $R_{ce}(U)$.

2.8. Для $Z \in R(U)$ обозначим Z^+ (соответственно Z^-) множество всех непрерывных отображений $z\colon [a, b) \to L$ (соответственно $z\colon (a, b] \to L$, в качестве открытого конца может быть ∞ или $-\infty$), удовлетворяющих условиям: для любого отрезка I, лежащего в области определения функции z, $z|_I \in Z$ и нет элемента пространства Z, продолжающего функцию z. Обозначим Z^{-+} множество всех таких непрерывных отображений $z\colon (a, b) \to L$, что для некоторого (а значит, и для любого) $t \in (a, b) z|_{(a,t)} \in Z^-$, $z|_{[t,b)} \in Z^+$.

2.9. Лемма. *Пусть $Z \in R_c(U)$ и отображение $z\colon [a, b) \to \to L$ принадлежит множеству Z^+. Тогда при $t \to b$ график функции z выходит из любого компактного подмножества области U, т. е. для любого компакта $K \subset U$ найдется такое число $t_0 \in [a, b)$, что при $t > t_0$ $(t, z(t)) \in U \setminus K$.*

Доказательство. Заметим сначала, что нет компактного подмножества K множества U, содержащего график функции z. В противном случае в силу компактности множества Z_K из последовательности ограничений функции z на отрезки $[a, b - 2^{-n}(b-a)]$ (случай $b = \infty$ невозможен в силу компактности множества K) можем выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $z_0 \in Z_K$. Из нашего определения топологии пространства $C_s(U)$, теоремы IV.2.2 и теоремы IV.1.8 следует, что график функции z_0 — замыкание объединения возрастающей последовательности указанных ограничений функции z и, следовательно, функция z_0 продолжает функцию z, что противоречит условию $z \in Z^+$.

Перейдем к основной части доказательства леммы. Пусть K — произвольное компактное подмножество области U. Допустим, что компакт K не удовлетворяет поставленным условиям. Зафиксируем произвольно компактное подмножество A множества U, содержащее в своей внутренности компакт K. В силу сделанного допущения и факта, установленного в первой части доказательства (с A в качестве K), имеем возможность так выбрать точки $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < s_3 < t_3 < \ldots$ полуинтервала $[a, b)$, что $(s_i, z(s_i)) \in K$, $(t_i, z(t_i)) \in \operatorname{Fr} A$ [1] и $\operatorname{Gr}(z_i) \subset A$, где z_i обозначает ограничения функции z на отрезок $[s_i, t_i]$. В силу компактности множества Z_A, содержащего все функции последовательности $\{z_i \colon i = 1, 2, \ldots\}$, выберем из этой последовательности подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $z^* \in Z_A$. Но, с одной стороны, в силу непрерывности отображения π область определения функции z^* состоит из одной точки $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = \lim\limits_{i\to\infty} t_i$, а с другой — ее график должен задевать за множества K и $\operatorname{Fr} A$, которые не пересекаются. Полученное противоречие доказывает лемму.

Очевидно, аналогичные утверждения имеют место и для элементов пространств Z^- и Z^{-+}.

2.10. Лемма. *Пусть $Z \in R_{ce}(U)$ и $z_0 \in Z$. Тогда существует функция $z \in Z^{-+}$, продолжающая функцию z_0.*

Доказательство. I. Пусть для $(t, y) \in U$ $\lambda(t, y) = \{\pi(z) \colon z \in Z, \sup \pi(z) = t, z(t) = y\}$. Множество $\lambda(t, y)$ состоит из отрезков, правый конец которых совпадает с точкой t, поэтому объединение элементов этого множества есть либо отрезок, либо полуинтервал с открытым левым концом. Но из условия 5 определения множества $R_{ce}(U)$ следует, что это объединение — открытое множество, поэтому случай отрезка отпадает. Пусть $\alpha(t, y)$ — левый конец полуинтервала $\cup\lambda(t, y)$.

II. Построим последовательные продолжения z_i, $i = 1, 2, \ldots$, функции z_0 влево. Пусть имеется функция z_i, $i = 0, 1, \ldots$, $[a_i, b_0]$ — область ее определения. В соответствии с определением числа $\alpha(t, y)$ найдется функция $y \in Z$ с областью определения $[a_{i+1}, a_i]$, принимающая значение $z_i(a_i)$ в точке a_i, причем левый

[1] $\operatorname{Fr} A = [A] \setminus \langle A \rangle$ — граница множества A.

конец a_{i+1} области определения функции y удовлетворяет условию $a_{i+1} \in (\alpha(a_i, z_i(a_i)), \alpha(a_i, z_i(a_i)) + 2^{-i})$, если $\alpha(a_i, z_i(a_i)) > -\infty$, и $a_{i+1} < -i - 1$, если $\alpha(a_i, z_i(a_i)) = -\infty$. Пусть $z_{i+1}(t) = z_i(t)$ при $t \in [a_i, b_0]$ и $z_{i+1}(t) = y(t)$ при $t \in [a_{i+1}, a_i]$.

Ясно, что при таком построении $\alpha(a_0, z_0(a_0)) \leqslant \alpha(a_1, z_1(a_1)) \leqslant \alpha(a_2, z_2(a_2)) \leqslant \ldots < a_0$, и если $\alpha = \lim\limits_{i\to\infty} \alpha(a_i, z_i(a_i))$, то $\alpha = \lim\limits_{i\to\infty} a_i$.

Определим на полуинтервале $(\alpha, b_0] = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [a_i, b_0]$ функцию z^*, положив $z^*(t) = z_i(t)$ при $t \in [a_i, b_0]$.

В соответствии с нашим построением ограничение функции z^* на любой отрезок, лежащий в полуинтервале $(\alpha, b_0]$, принадлежит пространству Z. Предположим, что найдется функция $y^* \in Z$, продолжающая функцию z^*. Из условия 5 определения множества $R_{ce}(U)$ следует, что можно предположить дополнительно, что точка α лежит внутри отрезка $\pi(y^*)$ и поэтому, начиная с некоторого i, точки $\alpha(a_i, z_i(a_i))$ и a_i лежат в этом отрезке и таким образом $\inf \pi(y*) < \alpha(a_i, z_i(a_i))$, $a_i \leqslant \sup \pi(y^*)$, а это противоречит определению числа $\alpha(a_i, z_i(a_i))$. Тем самым показали, что $z^* \in Z^-$.

III. Аналогично II продолжаем функцию z_0 вправо до элемента множества Z^+. Обозначим это продолжение z^{**} и положим

$$z(t) = \begin{cases} z^*(t) \text{ при } t \in \pi(z^*); \\ z^{**}(t) \text{ при } t \in \pi(z^{**}). \end{cases}$$

Как легко видеть, функция z удовлетворяет поставленным условиям. Лемма доказана.

2.11. Лемма. *Пусть $Z \in R_c(U)$. Тогда для любого компактного подмножества K области U найдется такое число $\delta > 0$, что для любой функции $z \in Z_K$ и любой функции $z_0 \in Z^{-+}$, продолжающей функцию z, выполнено $O_\delta \pi(z) \subset \pi(z_0)$ (т. е. если $[a, b] = \pi(z)$, то $(a - \delta, b + \delta) \subset \pi(z_0)$).*

Доказательство. Зафиксируем компакт $A \subset U$, содержащий компакт K внутри себя. Если предположить, что условие, поставленное в формулировке леммы, не выполнено, то из леммы 2.9 получим, что для любого $i = 1, 2, \ldots$ найдется функция $z_i \in Z_A$, график которой пересекается и с множеством K, и с множеством $\operatorname{Fr} A$, а длина области определения меньше 2^{-i}. В силу компактности множества Z_A из последовательности $\{z_i\colon i = 1, 2, \ldots\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $z^* \in Z_A$. Из непрерывности отображения π следует, что область определения функции z^* состоит из одной точки. С другой стороны, график функции z^* должен пересекаться и с множеством K, и с множеством $\operatorname{Fr} A$ (см. IV.3.1). Таким образом, сделанное допущение привело к противоречию. Лемма доказана.

§ 3. Непрерывность зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от начальных условий и правой части

3.1. Обсудим вопрос о непрерывности зависимости решений от начальных условий и правой части на уровне структур, описанных в предыдущем параграфе. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений теорема о непрерывности зависимости решения от начальных условий доказывается в классической формулировке при дополнительном предположении, что (локально) решение определяется начальными условиями единственным образом. В соответствии с этим введем множество $R_u(U)$ всех пространств $Z \in R(U)$, удовлетворяющих условию:

если области определения функций $z_1, z_2 \in Z$ совпадают и в некоторой точке t их общей области определения $z_1(t) = z_2(t)$, то $z_1 = z_2$ (т. е. функции совпадают на всей области определения).

Непосредственно из данного определения следует

3.2. Лемма. *Пусть $z_1, z_2 \in Z \in R_u(U)$ и при некотором $t \in \pi(z_1) \cap \pi(z_2)$, $z_1(t) = z_2(t)$. Тогда*

$$z_1|_{\pi(z_1)\cap\pi(z_2)} = z_2|_{\pi(z_1)\cap\pi(z_2)}.$$

3.3. Теорема. *Пусть $Z \in R_c(U)$, K — компактное подмножество области U, $A \subset U$, и для $x = (t, y) \in A$ множество $G(x) = \{z\colon z \in Z_K, t \in \pi(z), z(t) = y\}$ непусто. Тогда многозначное отображение $G\colon A \to Z_K$ полунепрерывно сверху.*

Доказательство. В соответствии с теоремой VI.7.5 достаточно показать, что для любого замкнутого в компакте Z_K множества F множество $G^{-1}(F) = \{x\colon x \in A, G(x) \cap F \neq \varnothing\}$ замкнуто в компакте K. Возьмем произвольную последовательность $\{x_i = (t_i, y_i)\colon i = 1, 2, \ldots\}$ точек множества $G^{-1}(F)$, сходящуюся к точке $x_0 = (t_0, y_0) \in A$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ зафиксируем функцию z_i, принадлежащую множеству $G(x_i) \cap F$. В силу компактности множества Z_K из последовательности $\{z_i\colon i = 1, 2, \ldots\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $z_0 \in Z_K$. В силу замкнутости множества F $z_0 \in F$. По теореме 1.14 $z_i(t_i) \to z_0(t_0)$, поэтому $z_0(t_0) = \lim\limits_{i\to\infty} z_i(t_i) = \lim\limits_{i\to\infty} y_i = y_0$ и, следовательно, $x_0 \in G^{-1}(F)$. Теорема доказана.

3.4. Теорема. *Пусть $Z \in R_c(U)$, K — компактное подмножество U, I — отрезок прямой, $A \subset K$ и для точки $x = (t, y)$ множества A множество $G(x) = \{z\colon z \in Z_K, \pi(z) = I, z(t) = y\}$ непусто. Тогда отображение $G\colon A \to Z_K$ полунепрерывно сверху.*

Доказательство. По теореме 3.3 многозначное отображение $F_1(x) = \{z\colon z \in Z_K, t \in \pi(z), z(t) = y\}$ полунепрерывно сверху. Очевидно, что постоянное многозначное отображение $F_2 \equiv \pi^{-1}(I)$ полунепрерывно сверху. Из теоремы VI.7.7 получаем полунепрерывность сверху отображения $G(x) = F_1(x) \cap F_2(x)$.

3.5. Следствие. *Пусть в обозначениях теоремы* 3.4 *для любой точки x множества A множество $G(x)$ состоит ровно из одной функции. Тогда (однозначное) отображение $G\colon A \to Z_K$ непрерывно.*

3.6. Теорема. *Пусть $Z \in R_{ce}(U)$, $(t_0, y_0) \in U$. Тогда найдутся такие числа $\mu > \nu > 0$, что множество $K_0 = [t_0 - \nu, t_0 + \nu] \times [O_\mu y_0]$ лежит в области U и для любой функции $z \in Z^{-+}$, график которой пересекается с множеством $A = [t_0 - \nu, t_0 + \nu] \times [O_\nu y_0]$, выполнено $[t_0 - \nu, t_0 + \nu] \subset \pi(z)$ и $\mathrm{Gr}(z_r|_{[t_0-\nu, t_0+\nu]}) \subset K_0$.*

Доказательство. Возьмем такое $\mu > 0$, что компактное множество $K = [t_0 - \mu, t_0 + \mu] \times [O_\mu y_0]$ лежит в области U. Найдем число $\delta > 0$ в соответствии с леммой 2.11. По теореме 2.2 множество Z_K равностепенно непрерывно, и поэтому найдется такое число $\nu \in (0, \min\{\delta/2, \mu/2\})$, что для любой функции $z \in$

$\in Z_K$ и любых точек $s, t \in \pi(z)$, если $|s-t| < \nu$, то имеет место неравенство $\|z(s) - z(t)\| < \mu/2$.

Покажем, что числа μ и ν удовлетворяют поставленным условиям. Пусть график функции $z \in Z^{-+}$ пересекается с множеством $A = [t_0 - \nu, t_0 + \nu] \times [O_\nu y_0]$ и точка $t \in [t_0 - \nu, t_0 + \nu] \cap \pi(z)$ такова, что $z(t) \in [O_\nu y_0]$. В силу нашего выбора чисел δ и ν $[t_0 - \nu,\, t_0 + \nu] \subset (t - \delta, t + \delta) \subset \pi(z)$. В силу выбора числа ν, если $s \in [t_0 - \nu, t_0 + \nu]$ и на отрезке с концами s и t график функции z лежит в компакте K, то $\|y_0 - z(s)\| \leqslant \|y_0 - z(t)\| + \|z(t) - z(s)\| < (\mu/2) + (\mu/2) = \mu$ и, следовательно, $\mathrm{Gr}(z|_{[t_0-\nu, t_0+\nu]}) \subset K_0$. Теорема доказана.

3.7. В теореме 3.6 находим множество A и компакт $K = K_0$, для которых применение теоремы 3.4 и ее следствия 3.5 содержательно. Если в обозначениях этих теорем дополнительно потребуем, чтобы $Z \in R_u(U)$, то окажется, что для любой точки $x \in A$ множество $G(x)$ состоит из одной функции и, следовательно, мы находимся в условиях следствия 3.5. Это, собственно, и составляет содержание теоремы о непрерывности зависимости решения уравнения от начальных условий.

Отбросим предположение о единственности решения. В этом случае имеем полунепрерывность сверху отображения G в теореме 3.3 и при непустоте множеств $G(x)$ условие полунепрерывности сверху отображения такого вида при любом компакте $K \subset U$ оказывается ввиду теоремы VI.7.10 эквивалентным для пространства $Z \in R(U)$ условию 4 п. 2.5.

Естественно подойти с этих позиций к вопросу о том, что понимается под непрерывностью зависимости решений обыкновенного дифференциального уравнения от правой части при отсутствии условия единственности решения с данными начальными условиями. Теорема VI.7.12 подсказывает следующее определение.

3.8. Говорим, что последовательность $\{Z_i\colon i = 1, 2, \ldots\}$ подпространств пространства $C_s(U)$ сходится к пространству $Z \subset C_s(U)$ в области U, если для любого компактного подмножества K области U и любой последовательности функций $z_j \in (Z_{i_j})_K$ найдутся функция $z \in Z$ и подпоследовательность последовательности $\{z_i\colon i = 1, 2, \ldots\}$, сходящаяся к функции z.

3.9. Обратим внимание на то, что сходимость стационарной последовательности $Z_i \equiv Z \in R(U)$ к пространству Z означает выполнение для пространства Z условия 4 п. 2.5, т.е. принадлежность пространства Z множеству $R_c(U)$.

3.10. Лемма. *Пусть последовательность пространств $\{Z_i \colon i = 1, 2, \ldots\} \subset R_{ce}(U)$ сходится в области U к пространству $Z \in R_c(U)$, $z_i \in Z_i^{-+}$, $z \in Z$, начиная с некоторого $\pi(z) \subset \subset \pi(z_i)$ и последовательность $\{z_i|_{\pi(z)} \colon i = 1, 2, \ldots\}$ равномерно сходится к функции z. Тогда найдутся функция $z^* \in \in Z^{-+}$, продолжающая функцию z, и подпоследовательность $\{z_{i_k} \colon k = 1, 2, \ldots\}$ такие, что для любого отрезка I, лежащего в области определения функции z^*, $I \subset \pi(z_{i_k})$, начиная с некоторого k, и последовательность $\{z_{i_k}|_I \colon k = 1, 2, \ldots\}$ равномерно сходится к функции $z^*|_I$.*

Доказательство. I. Покажем прежде всего, что для некоторого $\delta > 0$ найдется подпоследовательность рассматриваемой последовательности функций, области определения элементов которой содержат отрезок $[a - \delta, b + \delta]$, где $[a, b] = \pi(z)$, и которая на отрезке $[a - \delta, b + \delta]$ равномерно сходится к некоторой функции $z_0 \in Z$, продолжающей функцию z. Для этого зафиксируем компакт K, содержащий множество $\mathrm{Gr}(z)$ внутри себя, и отметим для тех i, для которых это возможно (см. формулировку доказываемой леммы и лемму 2.9), точки a_i и b_i интервала $\pi(z_i)$ таким образом, что $[a, b] \subset [a_i, b_i]$, $\mathrm{Gr}(z_i|_{[a_i, b_i]}) \subset K$, а точки $(a_i, z_i(a_i))$ и $(b_i, z_i(b_i))$ принадлежат границе компакта K. В силу сходимости последовательности $\{Z_i \colon i = 1, 2, \ldots\}$ к пространству Z в области U из последовательности функций $\{z_i^* = z_i|_{[a_i, b_i]}\}$ можем выбрать подпоследовательность $\{z_{i_k}^* \colon k = 1, 2, \ldots\}$, сходящуюся к некоторой функции $z_0 \in Z_K$. В силу непрерывности отображения π $\pi(z_{i_k}^*) \to \pi(z_0)$ или $a_{i_k} \to a_0$ и $b_{i_k} \to b_0$, где $[a_0, b_0] = \pi(z_0)$. Из теоремы 1.14 следует, что

$$(a_{i_k}, z_{i_k}(a_{i_k})) \to (a_0, z_0(a_0)), \quad (b_{i_k}, z_{i_k}(b_{i_k})) \to (b_0, z_0(b_0)),$$

а из этого в свою очередь следует, что точки $(a_0, z_0(a_0))$ и $(b_0, z_0(b_0))$ лежат в границе компакта K. Функция z_0 продолжает функцию z (будучи пределом последовательности, которая на отрезке $\pi(z)$ сходится к функции z), и поэтому график функции z_0 на отрезке $\pi(z)$ лежит внутри компакта K и, следовательно, точки a_0 и b_0 не принадлежат отрезку $\pi(z)$, т. е. отрезок $\pi(z)$ лежит внутри отрезка $[a_0, b_0]$. Возьмем в качестве δ любое положительное число, которое меньше расстояний от точек a_0 и b_0 до отрезка $\pi(z)$. При таком выборе δ, начиная с некоторого k, отрезок $[a-\delta, b+\delta]$ лежит в отрезке $[a_{i_k}, b_{i_k}]$ (используем непрерывность отображения π) и сходимость последовательности функций $\{z_{i_k}|_{[a-\delta,b+\delta]}\colon k = k_0, k_0+1, \ldots\}$ к функции $z_0|_{[a-\delta,b+\delta]}$ следует теперь из теоремы 1.14.

II. В оставшейся части доказательства повторим с некоторыми изменениями и усложнениями доказательство леммы 2.10.

Последовательно выбираем из фигурирующей в формулировке леммы последовательности функций подпоследовательности $\gamma_m = \{z_{n(m,k)}\colon k = 1, 2, \ldots\}$ таким образом, что γ_{m+1} есть подпоследовательность последовательности γ_m и $n(m,k) < n(m,k+1)$, и фиксировать числа η_m так, что на отрезке $[\eta_m, b]$ последовательность γ_m равномерно сходится к некоторой функции $y_m \in Z$.

Пусть λ_m есть множество всех отрезков вида $[c, \eta_m]$, на которых из последовательности γ_m можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу пространства Z. Из I следует, что множество $\cup\lambda m$ является полуинтервалом с открытым левым концом. Пусть α_m — левый конец полуинтервала $\cup\lambda_m$.

Для начала нашего построения полагаем $\eta_1 = a$ и для $k = 1, 2, \ldots n\ (1, k) = k$.

Пусть выбрана подпоследовательность γ_m и выбрано число $\eta_m, n = 1, 2, \ldots$ Имеем $\alpha_m < \eta_m$. В качестве η_{m+1} возьмем любое число из интервала $(\alpha_m, \min\{\alpha_m + 2^{-m}, \eta_m\})$, если $\alpha_m > -\infty$, и из интервала $(-\infty, \min\{-m, \eta_m\})$, если $\alpha_m = -\infty$. Из последовательности γ_m выберем подпоследовательность γ_{m+1} с соблюдением поставленных выше условий так, чтобы на отрезке $[\eta_{m+1}, \eta_m]$ последовательность γ_{m+1} сходилась к некоторому элементу пространства Z. Таким образом, на отрезке $[\eta_{m+1}, b]$ последовательность γ_{m+1} сходится к некоторой функции $y_{m+1} \in Z$, продолжающей функцию y_m.

Ясно, что при нашем построении $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \ldots$, и если $\eta = \lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m$, то $\eta = \lim\limits_{m\to\infty} \eta_m$.

Определим на полуинтервале $(\eta, b] = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} [\eta_m, b]$ функцию y, положив $y(t) = y_m(t)$ при $t \in [\eta_m, b]$, $m = 1, 2, \ldots$ В соответствии с нашим построением для любого отрезка $I \subset (\eta, b]$, начиная с некоторого номера k, области определения элементов последовательности $\gamma^* = \{z_{n(k,k)} \colon k = 1, 2, \ldots\}$ содержат отрезок I и последовательность $\{z_{n(k,k)}|_I \colon k = 1, 2, \ldots\}$ равномерно сходится к функции $y|_I \in Z$. Аналогично заключительной части пункта II доказательства леммы 2.10 устанавливаем, что $y \in Z^-$.

III. Аналогично II строим функцию $y^* \in Z^+$, продолжающую функцию z вправо, и выбираем из последовательности γ^* подпоследовательность $\{z_{i_k} \colon k = 1, 2, \ldots\}$ (используем обозначения формулировки леммы), равномерно сходящуюся на каждом отрезке $I \subset \pi(y^*)$ к функции y^*. Остается положить

$$z(t) = \begin{cases} y(t) & \text{при } t \in \pi(y), \\ y^*(t) & \text{при } t \in \pi(y^*). \end{cases}$$

Проверка выполнения всех поставленных условий тривиальна. Лемма доказана.

3.11. Теорема. *Пусть последовательность пространств $\{Z_i \colon i = 1, 2, \ldots\} \subset R_{ce}(U)$ сходится в области U к пространству $Z \in R_c(U)$. Тогда $Z \in R_{ce}(U)$.*

Доказательство. Возьмем произвольно точку (t, y) области U и обозначим через z функцию, определенную на одноточечном множестве $\{t\}$ и принимающую значение y в точке t. Из условий 1 и 5 определения множества $R_{ce}(U)$ следует, что при любом $i = 1, 2, \ldots$ функция z принадлежит множеству Z_i, а из этого в силу сходимости последовательности $\{Z_i \colon i = 1, 2, \ldots\}$ в области U к пространству Z вытекает, что $z \in Z$. По лемме 2.10 для каждого $i = 1, 2, \ldots$ найдется функция $z_i \in Z_i^{-+}$, продолжающая функцию z. Применяя лемму 3.10, получаем существование функции $z^* \in Z^{-+}$, область определения которой содержит точку t и которая принимает значение y в точке t. Отсюда сразу следует требуемое. Теорема доказана.

3.12. Теорема. *Пусть последовательность пространств $\{Z_i\colon i = 1,2,\ldots\} \subset R_{ce}(U)$ сходится в области U к пространству $Z \in R_{ce}(U)$, $z_i \in Z_i^{-+}$, $t_i \in \pi(z_i)$, и последовательность точек $\{(t_i, z_i(t_i))\colon n = 1,2,\ldots\}$ сходится к точке (t,y) области U. Тогда найдутся функция $z^* \in Z^{-+}$, область определения которой содержит точку t и которая принимает значение y в точке t, и подпоследовательность $\{z_{i_k}\colon k = 1,2,\ldots\}$, такие, что для любого отрезка I, лежащего в области определения функции z^*, начиная с некоторого k, $I \subset \pi(z_{i_k})$, и последовательность $\{z_{i_k}|_I\colon k = 1,2,\ldots\}$ равномерно сходится к функции $z^*|_I$.*

Доказательство. Зафиксируем компактное подмножество K области U, содержащее точку (t,y) внутри себя. Тогда, начиная с некоторого i, $\{t_i, z_i(t_i)\} \in K$, и из леммы 2.9 следует, что найдутся такие числа $a_i < b_i$, что $t_i \in [a_i, b_i] \subset \pi(z_i)$, график функции $z_i|_{[a_i,b_i]}$ лежит в компакте K, а точки $(a_i, z_i(a_i))$ и $(b_i, z_i(b_i))$ лежат в границе компакта K.

Покажем, что, начиная с некоторого i, $t \in [a_i, b_i]$. Допустим противное. Тогда из условия сходимости последовательности $\{Z_i\colon i = 1,2,\ldots\}$ к пространству Z в области U следует, что мы можем выбрать подпоследовательность $\{z_{i_k}\colon k = 1,2,\ldots\}$, сходящуюся к некоторой функции $z \in Z_K$, такую, что при любом $k = 1,2,\ldots$ $t \notin [a_{i_k}, b_{i_k}]$, а это входит в противоречие с одним из фактов, установленных в теореме 1.14.

Пусть $z^* = z_i|_{[a_i,b_i]}$. Выберем из последовательности $\{z_i^*\colon i = 1,2,\ldots\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{z_{i_k}^*\colon k = 1,2,\ldots\}$. Из теоремы 1.14 следует, что $z_{i_k}(t) = z_{i_k}^*(t) \to y$. Теперь применение леммы 3.10 к подпоследовательности $\{z_{i_k}\colon k = 1,2,\ldots\}$ дает требуемое. Теорема доказана.

3.13. Мы обсудили следствия сходимости последовательности пространств. Напомним простейшую ситуацию, связанную именно с непрерывностью зависимости решений от правой части уравнения, когда имеет место такая сходимость.

Пусть функции f_i, $i = 0,1,2,\ldots$, непрерывны в области U, и на любом компактном подмножестве области K последовательность функций $\{f_i\colon i = 1,2,\ldots\}$ равномерно сходится к функции

f_0 (т. е. последовательность $\{f_i\colon i = 1, 2, \ldots\}$ сходится к функции f_0 относительно бикомпактно-открытой топологии).

Зафиксируем компактное подмножество K области U. Пусть z_i, $i = 1, 2, \ldots$, — решение уравнения $y' = f_i(t, y)$ и $\mathrm{Gr}(z_i) \subset \subset K$. Покажем, что из последовательности $\{z_i\colon i = 1, 2, \ldots\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому решению z_0 уравнения $y' = f_0(t, y)$. Это соответствует нашему подходу к вопросу о непрерывности зависимости решений уравнения от правой части.

Из равномерной сходимости на компакте K последовательности функций $\{f_i\colon i = 1, 2, \ldots\}$ к функции f_0 следует, что $\sup\{\|f_i(t, y)\|\colon (t, y) \in K,\ i = 1, 2, \ldots\} < \infty$. Как и в аналогичной ситуации 2.7, отсюда следует, что производные функций z_i, $i = 1, 2, \ldots$ ограничены по абсолютной величине числом $m = \sup\{\|f_i(t, y)\|\colon (t, y) \in K, i = 1, 2, \ldots\}$, и последовательность функций $\{z_i\colon i = 1, 2, \ldots\}$ равностепенно непрерывна. В силу теоремы 2.3 наша цель будет достигнута, если предположим дополнительно, что последовательность $\{z_i\colon i = 1, 2, \ldots\}$ сходится к некоторой функции $z_0 \in C_s(U)$, и покажем, что функция z_0 — решение уравнения $y' = f_0(t, y)$.

Пусть $\pi(z_0) = [a_0, b_0]$. Если $a_0 = b_0$, то доказываемое утверждение очевидно. Рассмотрим случай $a_0 < b_0$.

Возьмем произвольно точки $a < b$ из внутренней области определения функции z_0. В силу непрерывности отображения π найдется такое число N_1, что для любого номера $i \geqslant N_1$ $a, b \in \pi(z_i)$. В силу сходимости $f_i \to f_0$ найдется такое число N_2, что для любого номера $i \geqslant N_2$ $\|f_i|_K - f_0|_K\| < \varepsilon/2(b-a)$. Отображение $F\colon U \to \mathbb{R} \times L$, $F(t, y) = (t, f_0(t, y))$, непрерывно, и из теоремы IV.8.6 следует, что оно порождает непрерывное отображение $G\colon C_s(U) \to C_s(\mathbb{R} \times L)$.

Из теоремы 1.16 следует, что $\int\limits_a^b f_0(t, z_i(t))dt \to \int\limits_a^b f_0(t, z_0(t))dt$, и поэтому найдется такое число N_3, что для любого номера $i \geqslant \geqslant N_3$

$$\left\| \int\limits_a^b f_0(t, z_i(t))dt - \int\limits_a^b f_0(t, z_0(t))dt \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При $i \geqslant \max\{N_1, N_2, N_3\}$ имеем

$$\left\| \int_a^b f_i(t, z_i(t))dt - \int_a^b f_0(t, z_0(t))dt \right\| <$$

$$< \left\| \int_a^b f_i(t, z_i(t))dt - \int_a^b f_0(t, z_i(t))dt \right\| +$$

$$+ \left\| \int_a^b f_0(t, z_i(t))dt - \int_a^b f_0(t, z_0(t))dt \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \|f_i(t, z_i(t)) - f_0(t, z_i(t))\| \, dt + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что при $i \to \infty$

$$(*) \qquad \int_a^b f_i(t, z_i(t))dt \to \int_a^b f_0(t, z_0(t))dt.$$

Имеем

$$z_i(b) - z_i(a) = \int_a^b f_i(t, z_i(t))dt.$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$, получаем в силу (*)

$$z_0(b) - z_0(a) = \int_a^b f_0(t, z_0(t))dt.$$

Но это и означает, что функция z_0 — решение уравнения $y' = f_0(t, y)$.

§ 4. Сходимость последовательностей пространств решений

4.1. В этом параграфе опишем некоторые методы доказательства сходимости последовательности пространств решений, внутренние для развиваемой теории. Тем самым расширим наши возможности при исследовании вопроса о непрерывности зависимости решений от правой части уравнения.

Вопрос о сходимости последовательностей функций тесно связан с вопросом о равностепенной непрерывности этих последовательностей (§ 1). Естественно расчленить и изучение вопроса о сходимости последовательности пространств, выделив часть этого вопроса, связанную с равностепенной непрерывностью.

4.2. Семейство A подмножеств пространства $C_s(U)$ назовем ***равностепенно непрерывным в области*** U, если для любого компактного подмножества K области U, выбрав для каждого элемента $Z \in A$ семейства A в множестве Z_K не более чем по одному элементу, получим равностепенно непрерывное множество функций.

Множество всех равностепенно непрерывных в области U последовательностей $\{Z_n: n = 1, 2, \ldots\} \subset R(U)$ обозначим $s(U)$.

Получаемые результаты применимы и к стационарным последовательностям. В соответствии с этим целесообразно ввести следующее определение.

Подмножество Z пространства $C_s(U)$ назовем ***равностепенно непрерывным в области*** U, если для любого компактного подмножества K области U множество Z_K равностепенно непрерывно.

Множество всех равностепенно непрерывных в области U пространств $Z \in R(U)$ обозначим $S(U)$.

4.3. Теорема. *Пусть* $\{Z_n: n = 1, 2, \ldots\} \subset R(U)$, γ *— семейство открытых подмножеств области* U, *для любого элемента* V *которого* $\{(Z_n)_V: n = 1, 2, \ldots\} \in s(V)$ *и для любой точки* $t \in \mathbb{R}$

$$\dim\{y: y \in L, (t, y) \in U \setminus (\cup\gamma)\} \leqslant 0.$$

Тогда $\{Z_n: n = 1, 2, \ldots\} \in s(U)$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся компактное подмножество K области U и последовательность функций $z_n \in (Z_n)_K$, не являющаяся равностепенно непрерывной. Из последнего условия следует, что можем так выбрать число $\varepsilon > 0$ и точки $a_k < b_k$ из области определения функции

z_{n_k}, что $|a_k - b_k| < 2^{-k}$ и $\|z_{n_k}(a_k) - z_{n_k}(b_k)\| \geqslant \varepsilon$. Пусть $z_k^* = z_{n_k}|_{[a_k,b_k]}$. В силу компактности метризуемого пространства $\exp K$ (теоремы IV.5.1 и IV.7.3) можем дополнительно предположить, что последовательность $\mathrm{Gr}(z_k^*)$ сходится в топологии Виеториса к некоторому множеству $F \in \exp K$ (в противном случае перейдем к подпоследовательности, удовлетворяющей этому условию). Из теоремы IV.8.8 следует, что множество F связно. Из условия $|a_k - b_k| < 2^{-k}$ и теоремы IV.8.6 следует, что последовательность $[a_k, b_k]$ сходится к некоторому одноточечному множеству $\{t\}$, в которое отображается множество F при проектировании произведения $\mathbb{R} \times L$ на сомножитель $\mathbb{R}$. Из выбора числа ε следует, что диаметр множества F не меньше ε. Неодноточечный компакт F, будучи связным, не может быть нульмерным, и поэтому $F \cap (\cup\gamma) \neq \varnothing$. Зафиксируем любой элемент V семейства γ, для которого $F \cap V \neq \varnothing$. Пусть (t, y) — произвольная точка множества $F \cap V$. Зафиксируем произвольное компактное подмножество K_0 области V, которое содержит внутри себя точку (t, y) и для которого $F \setminus K_0 \neq \varnothing$. Из теоремы IV.3.10 следует, что начиная с некоторого k, можем так выбрать отрезки $I_k \subset \pi(z_k^*)$ с концами s_k и t_k, что $(s_k, z_{n_k}(s_k)) \in K_0$ и $(s_k, z_{n_k}(s_k)) \to (t, y)$, $(t_k, z_{n_k}(t_k)) \in \mathrm{Fr}\, K_0$, $\mathrm{Gr}(z_{n_k}|_{I_k}) \subset K_0$. Графики элементов последовательности $\alpha = \{z_{n_k}|_{I_k} \colon k = 1, 2, \ldots\}$ лежат в компакте $K_0 \subset V$, $\{(Z_n)_V \colon n = 1, 2, \ldots\} \in s(V)$, поэтому из последовательности α можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Но предел этой подпоследовательности должен быть функцией, определенной на одноточечном множестве $\{t\}$, график которой пересекается с границей компакта K_0 и содержит точку (t, y), а это невозможно. Теорема доказана.

Рассмотрев последовательность, в которой при любом $n = 1, 2, \ldots$ $Z_n = Z$, получаем

4.4. Следствие. *Пусть $Z \in R(U)$, γ — семейство открытых подмножеств области U, для любого элемента V которого $Z_V \in S(V)$, и для любой точки $t \in \mathbb{R}$*

$$\dim\{y \colon y \in L, (t, y) \in U \setminus (\cup\gamma)\} \leqslant 0.$$

Тогда $Z \in S(U)$.

4.5. Чтобы использовать следствие 4.4 для доказательства принадлежности пространства множеству $R_c(U)$, надо уметь доказывать замкнутость подпространств пространства $C_s(U)$. Аналогичное добавление требует и теорема 4.3.

4.6. Лемма. *Пусть $Z \in R_p(U)$, $z \in C_s(U)$, M — не более чем счетное замкнутое подмножество области определения функции z и для любого отрезка $I \subset \pi(z) \setminus M$ $z|_I \in Z$. Тогда $z \in Z$.*

Доказательство. Обозначим через α множество всех открытых подмножеств J отрезка $\pi(z)$, удовлетворяющих условию:

для любого отрезка I, лежащего в множестве J $z|_I \in Z$.

Множество $M_0 = \pi(z) \setminus (\cup\alpha)$ по своему определению замкнуто и лежит в множестве M и, следовательно, не более чем счетно. Пусть $M_0 \neq \varnothing$. В множестве M_0 есть изолированная точка t (II.5.31). Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что в отрезке $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ нет точек множества M_0, отличных от точки t.

Из условия $Z \in R(U)$ следует, что множество $J_0 = \cup\alpha$ принадлежит семейству α и поэтому, если $\delta \in (0, \varepsilon)$ $I = [t-\varepsilon, t-\delta]$ или $I = [t+\delta, t+\varepsilon]$, то $z|_I \in Z$. Отсюда в силу условия $Z \in R_p(U)$ следует, что $z|_{[t-\varepsilon,t]} \in Z$ и $z|_{[t,t+\varepsilon]} \in Z$. Воспользовавшись условием $Z \in R(U)$, получаем $z|_{[t-\varepsilon,t+\varepsilon]} \in Z$ и, следовательно, $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \in \alpha$. Таким образом, допущение о непустоте множества M_0 привело к противоречию: взяв точку $t \in M_0$, мы показали, что $t \in \cup\alpha$, т. е. $t \notin M_0$. Таким образом, $J_0 = \pi(z)$, что и доказывает лемму.

4.7. Лемма. *Пусть $Z \in R(U)$, γ — открытое покрытие области V, для любого элемента V которого $Z_V \in R_p(V)$. Тогда $Z \in R_p(U)$.*

Доказать самим.

4.8. Пусть $M \subset U$ и $\Phi \subset C_s(U)$. Скажем, что множество M не более чем счетно относительно пространства Φ, если для любой функции $z \in \Phi$ множество $\{t\colon t \in \pi(z), (t, z(t)) \in M\}$ не более чем счетно.

4.9. Теорема. *Пусть Φ — замкнутое подпространство пространства $C_s(U)$, $\alpha = \{Z_n\colon n = 1, 2, \ldots\} \in s(U)$, $\cup\alpha \subset \Phi$, $Z \in R_p(U)$, γ — семейство открытых подмножеств обла-*

сти U, для любого элемента V которого последовательность $\{(Z_n)_V : n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к пространству Z_V в области V и множество $U \setminus (\cup\gamma)$ не более чем счетно относительно пространства Φ. Тогда последовательность α сходится к пространству Z в области U.

Доказательство. Пусть K — компактное подмножество области U и $z_i \in (Z_{n_i})_K$. Надо показать, что из последовательности $\{z_i : i = 1, 2, \ldots\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $z \in Z$. В силу условия $\alpha \in s(U)$, учитывая теорему 2.3, можем дополнительно предположить, что последовательность $\{z_i : i = 1, 2, \ldots\}$ сходится к некоторой функции $z \in C_s(U)$, а из замкнутости пространства Φ, содержащего все элементы этой последовательности, следует, что $z \in \Phi$ и поэтому (замкнутое) множество $\{t : t \in \pi(z), (t, z(t)) \in U \setminus (\cup\gamma)\}$ не более чем счетно. Из леммы 4.6 теперь следует, что $z \in Z$. Теорема доказана.

4.10. Следствие. *Пусть $Z \in R_p(U) \cap S(U)$, Φ — замкнутое подпространство пространства $C_s(U)$, содержащее подпространство Z, γ — семейство открытых подмножеств области U, для любого элемента V которого $Z_V \in R_c(V)$, и множество $U \setminus (\cup\gamma)$ не более чем счетно относительно пространства Φ. Тогда $Z \in R_c(U)$.*

4.11. Пусть Ψ — множество всех функций $z \in C_s(U)$, область определения которых состоит из одной точки. Для $Z \in R(U)$ положим $Z^* = Z \cup \Psi$.

4.12. Лемма. *Пусть $Z \in R_c(U)$. Тогда $Z^* \in R_c(U) \cap R_p(U)$.*

Доказать самим.

4.13. Теорема. *Пусть $Z \in R(U)$ и γ — открытое покрытие области U, для любого элемента V которого $Z_V \in R_c(V)$. Тогда $Z \in R_c(U)$.*

Доказательство. В силу леммы 4.12 для любого элемента V семейства γ $Z_V^* \in R_c(V) \cap R_p(V)$. Отсюда по следствию 4.4 получаем, что $Z^* \in S(U)$, а по лемме 4.7 — что $Z^* \in R_p(U)$. Применяем теорему 4.9 к последовательности $Z_n = Z^*$, взяв в качестве Φ пространство $C_s(U)$. В силу замечания 3.9

получаем, что $Z^* \in R_c(U)$. Покажем, что отсюда следует, что $Z \in R_c(U)$. Пусть K — произвольное компактное подмножество области U и $\{z_i\colon i = 1, 2, \ldots\} \subset Z_K$. В силу доказанного из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $z \in Z^*$. Если $z \in Z$, то имеем требуемое. В противном случае область определения функции z состоит из одной точки, обозначим ее через t. Найдется элемент V покрытия γ, содержащий точку $(t, z(t))$. Теперь из условия $Z_V \in R_c(V)$ следует, что $z \in Z$. Теорема доказана.

4.14. В теореме 4.9 мы ответили на часть вопроса, поставленного в 4.5, касающуюся сходимости последовательности пространств, сведя ее к первой части этого вопроса. Кроме того, нам надо уметь доказывать, что множество $U \setminus (\cup\gamma)$, фигурирующее в теореме 4.9, не более чем счетно относительно рассматриваемого пространства Φ.

Пусть действительная функция f определена и непрерывна в области U и $c \in \mathbb{R}$. Обозначим через $M(f, c)$ множество всех функций $z \in C_s(U)$, удовлетворяющих условию:

для любых двух точек $s < t$ из области определения функции z $f(t, z(t)) - f(s, z(s)) \geqslant c(t - s)$.

4.15. Предложение. *В обозначениях* 4.14 *множество* $M(f, c)$ *замкнуто в пространстве* $C_s(U)$.

Доказательство. Пусть последовательность функций $\{z_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$, принадлежащих множеству $M(f, c)$, сходится к функции $z \in C_s(U)$ и точки $s < t$ лежат в области определения функции z. По теореме IV.3.10 можно так выбрать точки $s_n, t_n \in \in \pi(z_n)$, что

$$(*) \qquad (s_n, z_n(s_n)) \to (s, z(s)), \quad (t_n, z_n(t_n)) \to (t, z(t)).$$

В силу сходимости $s_n \to s, t_n \to t$, начиная с некоторого n $s_n < t_n$, и из принадлежности $z_n \in M(f, c)$ следует, что

$$(**) \qquad f(t_n, z_n(t_n)) - f(s_n, z_n(s_n)) \geqslant c(t_n, s_n).$$

Из непрерывности функции f, (*) и (**) получаем

$$f(t, z(t)) - f(s, z(s)) \geqslant c(t - s).$$

Предложение доказано.

4.16. Предложение. *Пусть в обозначениях* 4.14 $c > 0$, $E \subset U$ *и множество* $f(E)$ *не более чем счетно. Тогда множество* E *не более чем счетно относительно пространства* $M(f, c)$.

Доказательство. Пусть $z \in M(f,c)$, $E_0 = \{t\colon t \in \pi(z), (t, z(t)) \in E\}$ и для $t \in \pi(z)$ $\varphi(t) = f(z(t))$. Для любых двух точек $s < t$ множества $\pi(z)$ $\varphi(t) - \varphi(s) \geqslant c(t - s)$, и поэтому функция $\varphi\colon \pi(z) \to \varphi(\pi(z))$ взаимно однозначна. Множество $\varphi(E_0) \subset f(E)$ не более чем счетно, и из взаимной однозначности функции φ теперь следует, что множество E_0 не более чем счетно. Предложение доказано.

4.17. Заметим, что в качестве функции f предложения 4.16 можно взять функцию $f(t, y) = t$. Для нее $M(f, 1) = C_s(U)$.

4.18. Приведем примеры, показывающие, как «работают» доказанные нами утверждения. Рассмотрим поведение пространств решений при стремлении некоторого параметра α к ∞. Под этим подразумеваем, что полученное описание поведения пространств решений годится для любой последовательности значений этого параметра $a_n \to \infty$. Выкладки, связанные с равномерной сходимостью последовательностей функций, стоящих в правых частях рассматриваемых уравнений, необходимые для наших рассуждений, хорошо известны из курса математического анализа и их приводить не будем.

Пусть $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, y)$ — непрерывная на U функция, значения которой больше некоторого положительного числа c, $\varphi(t, y) = y$, $\Phi = M(\varphi, c)$.

При $\alpha \to \infty$ функции $f_\alpha(t, y) = f(t, y) + \alpha e^{-\alpha y^2}$ равномерно стремятся к функции $f(t, y)$ на любом компакте, который не пересекается с прямой $y = 0$. Пусть γ_1 — множество всех областей на плоскости, имеющих компактное замыкание, которое не пересекается с прямой $y = 0$. Множество $U \setminus (\cup\gamma_1)$ совпадает с прямой $y = 0$ и не более чем счетно относительно пространства Φ. Применяя теорему 4.9 получаем, что пространства решений уравнений $y' = f_\alpha(t, y)$ сходятся в плоскости к пространству решений уравнения $y' = f(t, y)$ при $\alpha \to \infty$.

Усложним ситуацию. Пусть $g_\alpha(t, y) = f(t, y) + \alpha e^{-\alpha \operatorname{tg}^2(1/y)}$, γ_2 — множество всех областей плоскости, замыкания которых компактны и не пересекаются с прямыми $y = 0$ и $y = 1/\pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Как и в предыдущем примере, применяем теорему 4.9 и получаем, что пространства решений уравнений $y' = g_\alpha(t, y)$ при $\alpha \to \infty$ сходятся к пространству решений уравнения $y' = f(t, y)$.

Пусть $h_\alpha(t, y) = g_\alpha(t, y) + \alpha e^{-\alpha(t+y)^2}$.

Для доказательства сходимости пространств решений уравнений $y' = h_\alpha(t, y)$ при $\alpha \to \infty$ к пространству решений уравнения $y' = f(t, y)$ рассмотрим множество γ_3 всех областей, замыкания которых компактны и не пересекаются с прямыми $y = 0$, $y = 1/\pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, и $y = -t$. Доказательство счетности множества $U \setminus (\cup \gamma_3)$ относительно пространства Φ здесь не удается провести однократным применением предложения 4.16, и поэтому сначала можно, взяв функцию $\varphi^*(t, y) = t + y$, доказать, что прямая $y = -t$ не более чем счетна относительно пространства $\Phi = M(\varphi, c) = M(\varphi^*, c + 1)$, а затем рассуждать, как в предыдущих примерах.

§ 5. Теорема Кнезера

5.1. Речь пойдет о выполнении условия 6 п. 2.5. Отметим простейший случай выполнения этого условия: всякое пространство, принадлежащее множеству $R_u(U)$, удовлетворяет этому условию (см. 3.1). Возьмем этот факт в качестве отправного пункта в обсуждении свойства Кнезера.

5.2. Лемма. *Пусть $Z \in R_{cek}(U)$, K — континуум (т. е. связный компакт), $t \in \mathbb{R}$ и $K \subset U \cap ((-\infty, t] \times L)$ (соответственно $K \subset U \cap ([t, \infty) \times L)$). Пусть для любой функции $z \in Z^+$ (соответственно $z \in Z^-$) если $\mathrm{Gr}(z) \cap K \neq \varnothing$, то $t \in \pi(z)$. Тогда множество $S = \{z(t)\colon z \in Z, \mathrm{Gr}(z) \cap K \neq \varnothing\}$ связно и компактно.*

Доказательство проведем для основной формулировки. I. Покажем прежде всего, что множество $\Phi = \{z\colon z \in Z, \sup \pi(z) = t, \inf \pi(z), z(\inf \pi(z)) \in K\}$ компактно. Допустим противное. Тогда в силу теоремы I.4.29 в множестве Φ можем найти последовательность $\{\varphi_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$, из которой нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность. Для каждого номера n зафиксируем функцию $z_n \in Z^{-+}$, продолжающую функцию φ_n, — такая существует по лемме 2.10. Очевидно, можем считать, что последовательность точек $\{(t_n, z_n(t_n)): n = 1, 2, \ldots\}$ компакта K, где $t_n = \inf \pi(\varphi_n)$, сходится к некоторой точке $(t_0, y) \in K$ (в противном случае перейдем к подпоследовательности, удовлетворяющей этому условию). Применяем теорему 3.12 к последовательности функций $\{z_n: n = 1, 2, \ldots\}$, взяв для любого $n = 1, 2, \ldots$ в качестве пространства Z_n пространство Z. Пусть $z^* \in Z$ — функция, существующая по теореме 3.12, принимающая значение y в точке t_0, $\{z_{n_k}: k = 1, 2, \ldots\}$ — соответствующая подпоследовательность. Из условий доказываемой леммы следует, что $t \in \pi(z^*)$. Возьмем такое число $\delta > 0$, что $[t_0 - \delta, t + \delta] \subset \pi(z^*)$. Из условий, наложенных в теореме 3.12 на подпоследовательность $\{z_{n_k}: k = 1, 2, \ldots\}$, следует, что, начиная с некоторого k, $[t_0 - \delta, t + \delta] \subset \pi(z_{n_k})$ и на отрезке $[t_0 - \delta, t + \delta]$ последовательность функций $\{z_{n_k}: k = 1, 2, \ldots\}$ равномерно сходится к функции z^*. Применяя теорему 1.14, получаем, что $\varphi_{n_k} \to z^*|_{[t_0, t]}$, а это противоречит выбору последовательности $\{\varphi_n: n = 1, 2, \ldots\}$. Компактность множества Φ доказана.

II. Допустим, что множество S несвязно. Тогда $S = X_1 \cup X_2$, где множества X_1 и X_2 непусты, замкнуты и не пересекаются. Обозначим для $i = 1, 2$ $Z_i = \{z: z \in \Phi, z(t) \in X_i\}$, $K_i = \cup \operatorname{Gr}(Z_i)$. Отображение $\alpha: \Phi \to L$, $\alpha(\varphi) = \varphi(t)$ непрерывно по теореме 1.14, поэтому множества $Z_i = \alpha^{-1}(X_i)$, $i = 1, 2$, замкнуты в компакте Φ и, следовательно, компактны. По теореме VI.7.10 отсюда следует, что множества K_1 и K_2 компактны и поэтому замкнуты. Множества $K \cap K_1$ и $K \cap K_2$ непусты и замкнуты. Так как они покрывают компакт K, то из связности компакта K следует, что $(K \cap K_1) \cap (K \cap K_2) \neq \varnothing$, поэтому пересечение $K_1 \cap K_2$ непусто.

Проекция M непустого множества $K_1 \cap K_2 \subset \mathbb{R} \times L$ на первый сомножитель компактна, поэтому ее верхняя грань s принадлежит M. Возьмем точку $y \in L$ так, чтобы $(s, y) \in K_1 \cap K_2$. Имеем $s < t$ ($s = t$ невозможно, так как $(\{t\} \times L) \cap (K_1 \cap K_2) = \{t\} \times (X_1 \cap X_2) \neq \varnothing$).

Пусть для $i = 1, 2$ $Z_i^* = \{z: z \in Z, \pi(z) = [s, t], z(s) = y, z(t) \in X_i\}$, $K_i^* = \cup \operatorname{Gr}(Z_i^*)$.

Множество $Z_i{}^*$ — замкнутое подмножество компакта Z_i, поэтому оно компактно. Следовательно, компактно и множество K_i^*.

По выбору числа s и в силу определения множеств K_1^* и K_2^* $K_1^* \cap K_2^* = \{(s,y)\}$, а отсюда следует, что при $s' \in (s,t)$ $(\{s'\} \times \times L) \cap K_1^* \cap K_2^* = \varnothing$. Но в силу непустоты компактов $(\{s'\} \times L) \cap \cap K_1^*$ и $(\{s'\} \times L) \cap K_2^*$ это противоречит связности множества $(K_1^* \cup K_2^*) \cap (\{s'\} \times L) = \{z(s') \colon z \in Z, s, s' \in \pi(z), z(s) = y\}$ и тем самым условию $Z \in R_{cek}(U)$.

Компактность множества $S = \alpha(\Phi)$ следует из теоремы I.4.15. Лемма доказана.

5.3. Теорема. *Пусть последовательность пространств $\{Z_n \colon n = 1, 2, \ldots\} \subset R_{cek}(U)$ сходится в области U к пространству $Z \in R_c(U)$. Тогда $Z \in R_{cek}(U)$.*

Доказательство. I. Принадлежность $Z \in R_{ce}(U)$ доказана в теореме 3.11. Остается доказать, что пространство Z удовлетворяет условию 6 п. 2.5.

II. Пусть (t_0, y_0) — произвольная точка множества U. Зафиксируем произвольное компактное подмножество A области U, содержащее в своей внутренности точку (t_0, y_0). Существует такое число $\delta > 0$, что если $z \in Z^{-+}$, $t_0 \in \pi(z)$ и $z(t_0) = y_0$, то на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ график функции z лежит в множестве $\operatorname{Int} A$ (применяем лемму 2.11, взяв в качестве компакта K одноточечное множество $\{(t_0, y_0)\}$, в качестве U — множество $\operatorname{Int} A$).

Допустим, что для некоторого числа $t_1 \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ множество $S = \{z(t_1) \colon z \in Z, \pi(z) = [t_0 - \delta, t_0 + \delta], z(t_0) = y_0\}$ несвязно: $S = X_1 \cup X_2$, где множества X_1 и X_2 не пересекаются, непусты и замкнуты. Положим для определенности $t_0 < t_1$. Зафиксируем для $i = 1, 2$ функции $z_i \in Z$, для которых $\pi(z_i) = = [t_0, t_1]$, $z_i(t_0) = y_0$ и $z_i(t_i) \in X_i$.

Обозначим $H = \operatorname{Gr}(z_1) \cup \operatorname{Gr}(z_2)$.

III. Покажем, что найдется такое число N, что если номер n не меньше N и $z \in Z_n$, $\pi(z) = [a, b] \subset [t_0, t_0 + \delta]$, $\{a, z(a)\} \in H$, то $\operatorname{Gr}(z) \subset \operatorname{Int} A$. Допустим противное. Тогда для каждого $n = 1, 2, \ldots$ найдется функция $z_n^*(Z_n)_A$, для которой $\pi(z_n^*) = [a_n, b_n] \subset [t_0, t_0 + \delta]$, $(a_n, z_n^*(a_n)) \in H$, $(b_n, z_n^*(b_n)) \in \operatorname{Fr} A$. В силу сходимости последовательности пространств $\{Z_n \colon n = = 1, 2, \ldots\}$ в области U к пространству Z из последовательности функций $\{z_n^* \colon n = 1, 2, \ldots\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $z \in Z_A$. В силу теоремы 1.14 для функции z имеем $\pi(z) = [a, b] \subset [t_0, t_0 + \delta]$, $z(a) = z_i(a)$, где $i = 1$, или 2, $(b, z(b)) \in \mathrm{Fr}\, A$. Рассмотрим функцию $z^* \in Z$, для которой $\pi(z^*) = [t_0, b]$ и

$$z^*(t) = \begin{cases} z_i(t) \text{ при } t \in [t_0, a]; \\ z(t) \text{ при } t \in [a, b]. \end{cases}$$

Функцию z^* нельзя продолжить до элемента множества Z^{-+} в соответствии с нашим выбором δ (см. II). Полученное противоречие дает требуемое.

IV. Пусть W_1 и W_2 — непересекающиеся окрестности множеств X_1 и X_2 соответственно в пространстве L. Пусть для $n = 1, 2, \ldots$

$$B_n = \{z\colon z \in Z_n, (\inf \pi(z), z(\inf \pi(z))) \in H, \sup \pi(z) = t_1\}.$$

Из III следует, что при $n \geqslant N \cup \mathrm{Gr}(B_n) \subset \mathrm{Int}\, A$. Пусть $X_n^* = \{z(t_1)\colon z \in B_n\}$. По лемме 5.2 множество X_n^* связно. Отсюда и из непустоты множеств X_1 и X_2 следует, что $X_n^* \setminus (W_1 \cup W_2) \neq \varnothing$.

Зафиксируем для $n \geqslant N$ функции $z_n^* \in B_n$, для которых $Z_n^*(t_1) \in X_n^* \setminus (W_1 \cup W_2)$. В силу III $\mathrm{Gr}(z_n^*) \subset A$.

В силу сходимости последовательности пространства $\{Z_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ в области U к пространству Z из последовательности функций $\{z_n^*\colon n = 1, 2, \ldots\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $z \in Z$. Для функции z имеем $\mathrm{Gr}(z) \cap H \neq \varnothing$ и $z(t_1) \in L \setminus (W_1 \cup W_2)$, т. е. $z(t_1) \notin X_1 \cup X_2 = S$.

Пусть $\pi(z) = [a, t_1]$, где $t_0 \leqslant a < t_1$, и $z(a) = z_i(a), i = 1$ или 2. Рассмотрим функцию $z^* \in Z$, для которой $\pi(z^*) = [t_0, t_1]$ и

$$z^*(t) = \begin{cases} z_i(t) \text{ при } t \in [t_0, a]; \\ z(t) \text{ при } t \in [a, t_1]. \end{cases}$$

Пусть $z^{**} \in Z$ — произвольное продолжение функции z^* на отрезок $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ (в силу условия $Z \in R(U)$ и нашего выбора числа δ такое продолжение существует). Имеем $z^{**}(t_0) = y_0$ и $z^{**}(t_1) \notin S$. Но по определению множества S $z^{**}(t_1) \in S$. Полученное противоречие дает требуемое. Теорема доказана.

5.4. Покажем, как из доказанной теоремы можно вывести выполнение условия 6 п. 2.5 для пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью, т. е. докажем теорему Кнезера в ее классической формулировке.

Пусть рассматривается уравнение $y' = f(t, y)$, где функция непрерывна в области U. Зафиксируем счетную базу β области U, состоящую из множеств, замыкание каждого из которых в области U компактно. Пусть для $i = 1, 2, \ldots$ $K_i = [\bigcup_{j=1}^{i} V_j]$, где $\beta = \{V_i : i = 1, 2, \ldots\}$. Используя теорему I.4.22 Вейерштрасса–Стоуна фиксируем для каждого $i = 1, 2, \ldots$ многочлен f_i от координат точек $\mathbb{R} \times L$ такой, что $\|f_i|_{K_i} - f|_{K_i}\| < 2^{-i}$. Так как для любого компакта $K \subset U$, начиная с некоторого i $K \subset K_i$ (проверить самостоятельно), то последовательность функций $\{f_i : i = 1, 2, \ldots\}$ равномерно сходится к функции f на любом компактном подмножестве области U и мы находимся в ситуации, рассмотренной в 3.13, где показано, что в этом случае пространства решений уравнений $y' = f_i(t, y)$ (заметим, что многочлен f_i задан на всем пространстве $\mathbb{R} \times L$ и, следовательно, на U) сходятся к пространству решений уравнения $y' = f(t, y)$. Теперь из теоремы 5.3 следует, что пространство решений уравнения $y' = f(t, y)$ принадлежит множеству $R_{cek}(U)$.

Для скалярного случая ситуация проще.

5.5. Теорема. *Пусть $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и $Z \in R_{ce}(U)$. Тогда $Z \in R_{cek}(U)$.*

Доказательство. Возьмем произвольно точку (t_0, y_0) области U и найдем δ в соответствии с леммой 2.11 для компакта K, состоящего из одной точки (t_0, y_0). Наша цель будет достигнута, если покажем, что для любой точки t интервала $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ и любых точек a_1 и a_2 множества $S = \{z(t) : z \in Z, \pi(z) \ni (t_0), t, z(t_0) = y_0\}$ отрезок с концами в точках a_1 и a_2 целиком лежит в множестве S. Положим для определенности $t > t_0$ и $a_1 < a_2$. Допустим противное. Тогда найдется точка $a \in [a_1, a_2] \setminus S$. Возьмем произвольно функцию $z \in Z^{-+}$, область определения которой содержит точку t и которая в точке t принимает значение a. Для $i = 1, 2$ зафиксируем функции $z_i \in Z$, для которых $\pi(z_i) = [t_0, t]$, $z_i(t_0) = y_0$ и $z_i(t) = a_i$. Пусть $I = [t_0, t] \cap \pi(z)$. Множество I — либо отрезок, либо полуинтервал.

График функции z на множестве I не пересекается с графиками функций z_1 и z_2, так как противное входит в противоречие с выбором точки a и условием $Z \in R(U)$. Таким образом, для любой точки $s \in I$ $z_1(s) < z(s) < z_2(s)$. Но отсюда следует, что замыкание графика функции z на множестве I — компакт, лежащий в области U, а это в силу лемм 2.10 и 4.12 возможно лишь в том случае, когда $[t_0, t] \subset \pi(z)$. Но тогда $t_0 \in I$. Получаем, что одновременно выполнены условия $z_1(t) < z(t) < z_2(t)$ и $z_1(t) = z_2(t)$. Это невозможно. Полученное противоречие дает требуемое. Теорема доказана.

5.6. Теорема. *Пусть $Z \in R_{cek}(U)$, $(t, y) \in U$, $t \in [a, b]$ и для любой функции $z \in Z^{-+}$, если $t \in \pi(z)$ и $z(t) = y$, то $[a, b] \subset \pi(z)$. Тогда множество $X = \{z\colon z \in Z, \pi(z) = [a, b], z(t) = y\}$ связно (в топологии пространства $C_s(U)$ или, что эквивалентно, в топологии (метрике) равномерной сходимости).*

Доказательство в силу условия $Z \in R(U)$ достаточно провести для случаев $t = a$ и $t = b$, причем оба случая аналогичны. Положим для определенности $t = a$.

Допустим противное. Пусть $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 — непересекающиеся непустые замкнутые множества.

Множество X компактно (см. первую часть доказательства леммы 5.2).

Зафиксируем счетное всюду плотное в отрезке $[a, b]$ множество $T = \{t_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ и для каждого $n = 1, 2, \ldots$ зададим отображение $f_n\colon X \to L^n$ формулой

$$f_n(z) = (z(t_1), \ldots, z(t_n)).$$

Покажем, что при некотором n $f_n(X_1) \cap f_n(X_2) = \varnothing$. Если допустить противное, то для каждого $n = 1, 2, \ldots$ найдутся функции $z_n^i \in X_i$, $i = 1, 2$, для которых $f_n(z_n^1) = f_n(z_n^2)$. Воспользовавшись условием $Z \in R_{ce}(U)$ и применив теорему VI.7.10 к отображению Gr, рассматриваемому в качестве многозначного отображения, что обеспечивает существование компакта, содержащего графики всех этих функций, перейдем к подпоследовательностям $\{z_{n_k}^i : k = 1, 2, \ldots\}$, $i = 1, 2$, сходящимся соответственно к $z^1 \in X_1$ и $z^2 \in X_2$. Для этих функций имеет место для любого $n = 1, 2, \ldots$ $z^1(t_n) = z^2(t_n)$.

Ввиду плотности множества T в отрезке $[a,b]$ это означает, что $z^1 = z^2$ (см. I.4.17) и, следовательно, $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, что противоречит выбору множества X_1 и X_2.

Таким образом, для некоторого номера n множество $f_n(X)$ несвязно. Для продолжения рассуждения удобно переформулировать полученный результат: существуют такие точки $s_1 < \ldots < s_n$ отрезка $[a,b]$, что для отображения $f\colon X \to L^n$, $f(z) = (z(s_1),\ldots \ldots, z(s_n))$, множество $f(X)$ несвязно. Зафиксируем такое отображение f, у которого n — наименьшее из возможных. Из леммы 5.2 сразу следует, что $n \geqslant 2$. Пусть $g\colon X \to L^{n-1}$, $g(z) = (z(s_1),\ldots \ldots, z(s_{n-1}))$. Пусть $h\colon f(X) \to g(X)$ — проектирование, «забывающее» последнюю координату, и для $t \in g(X)$ $H(t) = h^{-1}(t)$. По нашему выбору числа n множество $g(X)$ связно. Многозначное отображение H, будучи обратным к непрерывному отображению h, заданному на компакте $f(X)$, полунепрерывно сверху (см. замечания VI.7.9 и I.4.18). Из теоремы VI.7.11 следует, что найдется такая точка $a = (a_1,\ldots,a_{n-1}) \in g(X)$, что множество $H(a)$ несвязно. Но это означает, что несвязно множество $\{z(s_n)\colon z \in \in Z, s_{n-1}, s_n \in \pi(z), z(s_{n-1}) = a_{n-1}\}$, а это противоречит лемме 5.2. Теорема доказана.

5.7. Замечание. Пусть выполнены предположения леммы 5.2. Тогда из теорем 3.4, VI.7.11 и 5.6 следует связность множества Φ, фигурирующего в доказательстве леммы 5.2.

5.8. Пример. Естественно встает вопрос о равенстве $R_{ce}(U) = R_{cek}(U)$. Приведем пример пространства $Z \in R_{ce}(U$, не принадлежащего множеству $R_{cek}(U)$.

Рассмотрим векторы на плоскости $e_1 = \{1,0\}$, $e_2 = \{0,-1\}$, $e_3 = -e_1$, $e_4 = -e_2$ и подмножества плоскости

$$M_1 = \{(x,y)\colon x \geqslant 0, -x \leqslant y \leqslant x\},$$
$$M_2 = \{(x,y)\colon y \geqslant 0, -y \leqslant x \leqslant y\},$$
$$M_3 = \{(x,y)\colon x \leqslant 0, x \leqslant y \leqslant -x\},$$
$$M_4 = \{(x,y)\colon y \leqslant 0, y \leqslant x \leqslant -y\}.$$

Пусть $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, Z_i — пространство решений уравнения $y' = = e_i$. Определим пространство Z условиями для $i = 1,2,3,4$ $Z|_{\mathbb{R}\times M_i} = Z_i|_{\mathbb{R}\times M_i}$. Легко видеть, что такое пространство $Z \in$

$\in R(U)$ существует и определяется этими условиями однозначно. Оставим читателю проверку того, что $Z \in R_{ce}(U)$ и что в точке $(0,0)$ не выполнено условие Кнезера.

§ 6. Автономные и близкие к ним пространства

6.1. Пусть V — открытое подмножество пространства L. Пространство $Z \in R\ (\mathbb{R} \times V)$ назовем ***автономным***, если оно замкнуто относительно сдвигов по $\mathbb{R}$, т. е. если $z \in Z$ и $t_0 \in \mathbb{R}$, то функция $z(t - t_0)$ также принадлежит множеству Z. Множество всех таких пространств Z обозначим $A(V)$. Такими являются пространства решений уравнений $y' = f(t, y)$, когда правая часть не зависит от t, т. е. уравнений $y' = f(y)$.

Пусть $*$ обозначает любой из фигурировавших выше, в частности в 2.5, наборов индексов. Положим $A_*(V) = A(V) \cap R_*(\mathbb{R} \times \times V)$.

6.2. Пусть $p(z)$ обозначает множество значений функции z. Пусть $M \subset V$ и $Z \in A(V)$. Назовем диаметром множества M относительно пространства Z число $\operatorname{diam}_Z M = \sup\{b - a\colon [a, b] = = \pi(z), z \in Z, p(z) \subset M\}$. При этом допускаем также значение ∞.

6.3. Лемма. *Пусть $Z \in A_{ce}(V)$, K — компактное подмножество области V и $\operatorname{diam}_Z K = \infty$. Тогда найдется такая функция $z_0 \in Z^+$, для которой $p(z_0) \subset K$ и $\pi(z_0) = [0, \infty)$.*

Доказательство. Из условий леммы следует, что для любого $n = 1, 2, \ldots$ найдется функция $z_n^* \in Z$, для которой $p(z_n^*) \subset K$ и длина области определения не меньше n. В силу условия автономности положим дополнительно, что $\inf \pi(z_n^*) = 0$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, добиваемся выполнения дополнительного условия: последовательность точек $\{z_n^*(0)\colon n = = 1, 2, \ldots\}$ сходится к некоторой точке $y \in K$. Пусть функция $z_n \in Z^{-+}$ продолжает функцию z_n^*, $n = 1, 2, \ldots$, а функция z определена на одноточечном множестве $\{0\}$ и принимает значение y в точке 0. Применяем лемму 3.10 к последовательности функций $\{z_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$, последовательности пространств $\{Z_n = Z\colon n = = 1, 2, \ldots\}$ и функции z. Для любого отрезка I, лежащего в множестве $J = \pi(z^*) \cap [0, \infty)$, где $z^* \in Z^{-+}$ — функция, существующая по лемме 3.10 $I \subset \pi(z_n{}^*)$, начиная с некоторого номера n.

Отсюда следует, что $z^*(I) \subset K$, а это ввиду произвола в выборе отрезка I означает, что $z^*(J) \subset K$. Но так как множество K компактно и $Z \in A_{ce}(V)$, то это возможно лишь в том случае, когда $J = [0, \infty)$. Остается положить $z_0 = z^*|_J$. Лемма доказана.

6.4. Лемма. *Пусть $Z \in A_{ce}(V)$, $\{K_n : n = 1, 2, \ldots\}$ — убывающая последовательность компактных подмножеств области V, c — действительное число и для любого n $\operatorname{diam}_Z K_n \geqslant \geqslant c$. Тогда $\operatorname{diam}_Z(\cap\{K_n : n = 1, 2, \ldots\}) \geqslant c$.*

Доказательство. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ зафиксируем функцию $z_n \in Z$, для которой $p(z_n) \subset K$ и длина области определения которой не меньше c. В силу условия автономности можем положить дополнительно, что $\inf \pi(z_n) = 0$. Пусть $z_n^* = z_n|_{[0,c]}$. Графики элементов последовательности $\{z_n^* : n = 1, 2, \ldots\}$ лежат в компакте $[0, c] \times K_1$, и поэтому в силу условия $Z \in A_{ce}(V)$ из этой последовательности можем выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $z \in Z$. Для нее имеем $p(z) \subset \subset \cap\{K_n : n = 1, 2, \ldots\}$ и $\pi(z) = [0, c]$, что и дает требуемое. Лемма доказана.

6.5. Следствие. *Пусть в обозначениях леммы 6.4 для любого $n = 1, 2, \ldots$ $\operatorname{diam}_Z K_n = \infty$. Тогда $\operatorname{diam}_Z(\cap\{K_n : n = = 1, 2, \ldots\}) = \infty$.*

6.6. Точку y области V назовем *стационарной точкой* пространства Z, если постоянная функция (определенная на всей прямой $\mathbb{R}$), принимающая значение y, принадлежит пространству Z^{-+}.

Ясно, что диаметр одноточечного множества либо бесконечен, либо равен нулю. В первом случае точка — стационарная точка рассматриваемого пространства Z. Из леммы 6.4 следует, что во втором случае точка обладает окрестностью сколь угодно малого диаметра.

Более общий, чем стационарная точка, пример множества бесконечного диаметра — множество значений любой периодической функции $z \in Z^{-+}$.

Из следствия 6.5 получаем, что среди компактов бесконечного диаметра имеются минимальные, т. е. не содержащие компактов бесконечного диаметра в качестве собственных подмножеств.

6.7. Пусть, как и раньше, V — открытое подмножество пространства L. Обозначим $B(V)$ множество всех пар вида $\langle Z, Z_\infty\rangle$, где для некоторого $a \in \mathbb{R}$ $Z \in R_{ce}((a,\infty)\times V)$ и $Z_\infty \in A_{ce}(V)$, причем пространство Z при $t \to \infty$ «стремится» к пространству Z_∞ в следующем смысле:

для любого компактного подмножества K области V, любого числа $c \geqslant 0$, любой последовательности $\{z_n : n = 1,2,\ldots\} \subset Z$, удовлетворяющей условиям $p(z_n) \subset K$, $b_n - a_n \geqslant c$, где $[a_n, b_n] = \pi(z_n)$, и $a_n \to \infty$ из последовательности функций $z_n(a_n + t)$, $0 \leqslant t \leqslant b_n - a_n$, $n = 1,2,\ldots$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу пространства Z_∞.

Заметим, что последнее условие соответствует понятию сходимости последовательностей пространств, изученному в §§ 3 и 4. Таким образом, если функции $f(y)$ и $g(t,y)$ непрерывны и, например, для любых значений аргументов t и y $\|g(t,y)\| \leqslant t^{-2}$, то пара $\langle Z, Z_\infty\rangle$, где Z — пространство решений уравнения $y' = f(y) + g(t,y)$, Z_∞ — пространство решений уравнения $y' = f(y)$ принадлежит множеству $B(V)$ (см. 3.13). Если же $f(y)$ и $g(t,y)$ — непрерывные положительные функции (и $L = \mathbb{R}$) и для любых значений аргументов t и y $g(t,y) < te^{-ty^2}$, то определенная аналогично предыдущему пара $\langle Z, Z_\infty\rangle$ также принадлежит множеству $B(V)$ (см. 4.18).

6.8. Лемма. *Пусть V — открытое подмножество пространства L, $\langle Z, Z_\infty\rangle \in B(V)$,*

$$\{z_n : n = 1,2,\ldots\} \subset Z, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, p(z_n) \subset K \in \exp_c V,$$

$$\pi(Z_n) = [a_n, b_n], \quad a_n \to \infty, \quad y \in \overline{\lim_{n\to\infty}}\, z_n(a_n)$$

(соответственно, $y \in \overline{\lim_{n\to\infty}}\, z_n(b_n)$). Тогда если числа $b_n - a_n$, $n = 1,2,\ldots$, ограничены в совокупности, то из последовательностей функций $z_n(a_n + t)$, $0 \leqslant t \leqslant b_n - a_n$, $n = 1,2,\ldots$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу z множества Z_∞, удовлетворяющему условию $z(\inf \pi(z)) = y$ (соответственно, $z(\sup \pi(z)) = y$), а если эти числа бесконечно возрастают, то существует функция $z \in Z^+_\infty$ (соответственно, $z \in Z^-_\infty$), для которой $\pi(z) = [0,\infty)$ (соответственно, $\pi(z) = (-\infty, 0]$) и $z(0) = y, p(z) \subset K$.

Доказательство. Очевидный переход к подпоследовательности сводит все к случаю, когда $y = \lim\limits_{n\to\infty} z_n(a_n)$ (соответственно, $y = \lim\limits_{n\to\infty} z_n(b_n)$). Если числа $b_n - a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничены в совокупности, то непосредственное сопоставление условий леммы с определением, данным в 6.7, и с теоремой 1.14 дает требуемое. Пусть теперь числа $b_n - a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ $\ldots$, бесконечно возрастают. Возьмем произвольно $c > 0$. Перейдем к подпоследовательности $\{z_{n_k} \colon k = 1, 2, \ldots\}$, для которой при любом k $b_{n_k} - a_{n_k} \geqslant c$. Пользуясь условием, фигурирующим в определении 6.7, применительно к последовательности $\{z_{n_k}|_{[a_{n_k}, a_{n_k}+c]} \colon k = 1, 2, \ldots\}$ (соответственно, $\{z_{n_k}|_{b_{n_k}-c, b_{n_k}]} \colon k = 1, 2, \ldots\}$) получаем существование функции $z_c^* \in Z_\infty$, длина области определения которой равна c и которая удовлетворяет условиям $p(z_c^*) \subset K$ и $z_c^*(\inf \pi(z_c^*)) = y$ (соответственно, $z_c^*(\sup\colon \pi(z_c^*)) = y$). Условие автономности дает возможность дополнительно потребовать $\inf \pi(z_c^*) = 0$ (соответственно $\sup \pi(z_c^*) = 0$). Зафиксируем для $i = 1, 2, \ldots$ произвольное продолжение $z_i^{**} \in Z_\infty^{-+}$ функции $z_i{}^*$ и применим теорему 3.12 к последовательности функций $\{Z_i^{**} \colon i = 1, 2, \ldots\}$, последовательности пространств $\{Z_i = Z_\infty \colon i = 1, 2, \ldots\}$, сходящейся к пространству Z_∞, последовательности точек $\{t_i = 0 \colon i = 1, 2, \ldots\}$. Пусть z^{**} — функция, существование которой утверждается в теореме 3.12. Если I — отрезок, лежащий в полуинтервале $I = [0, \infty) \cap \pi(z^{**})$ (соответственно $J = (-\infty, 0] \cap \pi(z^{**})$), то, начиная с некоторого i, $z_i^{**}(I) \subset K$ и поэтому $z^{**}(I) \subset K$. Отсюда следует, что $z^{**}(J) \subset$ $\subset K$ и $J = [0, \infty)$ (соответственно $J = (-\infty, 0]$). Для завершения доказательства леммы остается положить $z = z^{**}|_J$. Лемма доказана.

6.9. Пусть, как и раньше, U — открытое подмножество пространства $\mathbb{R} \times L$. Для $z \in (C_s(U))^- \cup (C_s(U))^{-+}$ обозначим

$$\Omega^-(z) = \cap\{[z((\inf \pi(z), t])] \colon t \in \pi(z)\}.$$

Для $z \in (C_s(U))^+ \cup (C_s(U))^{-+}$ обозначим

$$\Omega^-(z) = \cap\{[z(([t, \sup \pi(z)))] \colon t \in \pi(z)\}.$$

6.10. Теорема. *Пусть V — открытое подмножество пространства L, $\langle Z, Z_\infty \rangle \in B(V)$, $z \in Z^+$, $\pi(z) = [a, \infty)$ и $y \in$*

$\in V \cap \Omega^+(z)$. *Тогда найдется функция* $z^* \in Z_\infty^{-+}$, *для которой* $y \in p(z^*) \subset \Omega^+(z)$. *Если при этом множество* $\Omega^+(z)$ *компактно и лежит в области* V, *то можно дополнительно потребовать* $\pi(z^*) = (-\infty, \infty)$.

Доказательство. Зафиксируем последовательность точек $\{a_n : n = 1, 2, \dots\} \subset \pi(z)$, для которой $a < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ $\dots < a_n \to \infty$ и $z(a_n) \to y$. Обозначим Z_n результат сдвига пространства Z по $\mathbb{R}$ на a_n, т.е. $Z_n = \{\zeta(t + a_n) : \zeta \in Z, t \in$ $\in [-a_n + \inf \pi(\zeta), -a_n + \sup \pi(\zeta)]\}$. Из определения множества $B(V)$ следует, что последовательность пространств $\{Z_n : n =$ $= 1, 2, \dots\}$ сходится в любой области вида $(t_0, \infty) \times V$, $t_0 \in \mathbb{R}$, к пространству Z_∞. Пусть $z_0 \in Z^{-+}$ — продолжение функции z влево, $z_n(t) = z_0(t + a_n)$. Очевидно, $z_n \in Z_n^{-+}$. Применяем теорему 3.12, положив для любого $n = 1, 2$ $t_n = 0$. Для функции $z^* \in Z_\infty^{-+}$, очевидно, выполнено $z^*(0) = y$. Далее, пусть $[a', b']$ — произвольный отрезок, лежащий в области определения функции z^*. Так как $z_n([a', b']) = z_0([a_n + a', a_n + b'])$, то $z^*([a', b']) \subset$ $\subset \Omega^+(z)$. Ввиду произвола в выборе отрезка $[a', b']$ это означает, что $p(z^*) \subset \Omega^+(z)$. Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы в построенной выше последовательности $\{a_n : n = 1, 2, \dots\}$ перейдем к подпоследовательности $\{a_{n_k} : k = 1, 2, \dots\}$, для которой при любом $k = 1, 2, \dots$ $a_{n_{k+1}} - a_{n_k} \geqslant k$. Далее, применяя лемму 6.8 к последовательности функций $\{z|_{[a_{n_k}, a_{n_{k+1}}]} : k = 1, 2, \dots\}$, получаем существование функций $z_1^* \in Z_\infty^-$ и $z_2^* \in Z_\infty^+$, для которых $\pi(z_1^*) =$ $= (-\infty, 0]$, $\pi(z_2^*) = [0, \infty)$, $z_1^*(0) = z_2^*(0) = y$, $p(z_1^*) \cup p(z_2^*) \subset$ $\subset \Omega^+(z)$. Нам остается положить

$$z^*(t) = \begin{cases} z_1^*(t) \text{ при } t \in (-\infty, 0], \\ z_2^*(t) \text{ при } t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Теорема доказана.

6.11. Следствие. *Пусть* V — *открытое подмножество пространства* L, $Z \in A_{ce}(V)$, $z \in Z^+$, $\pi(z) = [a, \infty)$ *и* $y \in$ $\in V \cap \Omega^+(z)$. *Тогда найдется такая функция* $z^* \in Z^{-+}$, *для которой* $y \in p(z^*) \subset \Omega^+(z)$. *Если при этом множество* $\Omega^+(z)$ *компактно и лежит в области* V, *то можно дополнительно потребовать* $\pi(z^*) = (-\infty, \infty)$.

Доказательство. Для получения следствия достаточно заметить, что $\langle Z, Z\rangle \in B(V)$.

6.12. Следствие. *Пусть в обозначениях следствия* 6.11 *множество* $\Omega^+(z)$ *компактно и лежит в области* V. *Тогда* $\operatorname{diam}_Z \Omega^+(z) = \infty$.

6.13. Теорема. *Пусть* V — *открытое подмножество пространства* $\mathbb{R}^2$, $Z \in A_{ce}(V)$, $K \subseteq V$ — *минимальное компактное множество бесконечного относительно пространства* Z *диаметра. Тогда либо компакт* K *состоит из одной точки, либо найдется такая периодическая функция* $z \in Z^{-+}$, *что* $K = p(z)$.

Доказательство. По лемме 6.3 для любой точки $y \in K$ найдется такая функция $z \in Z^{-+}$, что $z(0) = y$, $p(z) \subset K$ и $\pi(z) = (-\infty, \infty)$, причем из минимальности компакта K следует, что $K = [p(z)]$. Пусть компакт K состоит более чем из одной точки. Возьмем произвольно точку $y_0 \in K$ и такое число $\varepsilon > 0$, что $K \setminus [O_\varepsilon y_0] \neq \varnothing$. Пусть $K_1 = K \cap [O_\varepsilon y_0]$. В силу минимальности компакта K $\operatorname{diam}_Z K_1 < \infty$.

Если кривая вида $z(t)$, где функция z удовлетворяет поставленным выше условиям, имеет самопересечения, то можем построить периодическую функцию такого вида, и тогда доказываемое утверждение справедливо. Надо рассмотреть случай, когда все такие кривые не имеют самопересечений.

Обозначим M^- множество точек $x \in [O_\varepsilon y_0] \setminus \{y_0\}$, удовлетворяющих условию:

найдется такая функция $z \in Z$, что $\pi(z) = [a, 0]$, $p(z) \subset K_1$, $z(0) = y_0$, $z(a) = x$.

Соответственно обозначим через M^+ множество точек $x \in [O_\varepsilon y_0] \setminus \{y_0\}$, удовлетворяющих условию:

найдется такая функция $z \in Z$, что $\pi(z) = [0, b]$, $p(z) \subset K_1$, $z(0) = y_0$, $z(b) = x$.

Множества M^- и M^+ не пересекаются, так как в противном случае получаем возможность построить периодическую функцию $z^* \in Z^{-+}$, для которой $p(z) \subset K_1$. Множества $M^- \cap S$ и $M^+ \cap S$, где $S = \operatorname{Fr} O_\varepsilon y_0$, непусты, так как диаметр множества K_1 относительно пространства Z конечен. По тем же соображениям эти множества замкнуты. Они не пересекаются, поэтому существуют конечные семейства интервалов s_1 и s_2 окружности S, покрывающие соответственно множества $M^- \cap S$ и $M^+ \cap S$ и такие, что элементы семейства $s_1 \cup s_2$ попарно не пересекаются и любой из них пересекается с множеством $M^- \cup M^+$.

В силу условия $Z \in A_{ce}(V)$ и теоремы 3.4 найдется такое число $\delta \in (0, \varepsilon)$, что если $z \in Z$, $p(z) \subset [O_\varepsilon y_0]$, $\pi(z) = [a, b]$, $\{z(a), z(b)\} \subset S$, $p(z) \cap [O_\delta y_0] \neq \varnothing$, то $z(a) \in \cup s_1$ и $z(b) \in s_2$. Зафиксируем любую функцию $z \in Z^+$, для которой $\pi(z) = [0, \infty)$, $z(0) = y_0$ и $p(z) \subset K$. В силу конечности диаметра множества K_1 относительно пространства Z кривая $z(t)$ при некотором значении аргумента выйдет за пределы множества K_1, а затем, так как ввиду минимальности компакта K $\Omega^+(z) = K$, вновь достигнет множества $[O_\delta y_0]$. Пусть это произойдет впервые при значении аргумента b. Положим $a = \sup\{t\colon t \in [0, b], z(t) \in K \setminus K_1\}$. По нашему выбору числа δ $z(a) \in \cup s_1$. Выберем тот интервал G семейства s_1, который содержит точку $z(a)$, и зафиксируем функцию $z \in Z$, для которой $\pi(z) = [c, 0]$, $p(z) \subset K_1$, $z(c) \in G$ и $z(0) = y_0$. Здесь пользуемся для новой функции, определенной на отрезке $[c, 0]$, старым символом z, считая, что тем самым продолжили имевшуюся ранее функцию на множество $[c, 0)$. Пусть g — подинтервал интервала G с концами в точках $z(a)$ и $z(c)$. Так как в силу минимальности компакта K $\Omega^+(z) = K$, то $z(c) \in \Omega^+(z)$. Значит, кривая $z(t)$, $t \geqslant b$, подходит сколь угодно близко к точке $z(c)$. Так как она при этом не может пересечь множество $z([c, b])$ и $\operatorname{diam}_Z K_1 < \infty$, то либо можно построить последовательность точек $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \ldots$ полуинтервала $[b, \infty)$ такую, что $z(s_i) \in [O_\delta y_0]$, $z([s_i, t_i]) \subset [O_\varepsilon y_0] \setminus O_\delta y_0$, $z(t_i) \to$ $\to z(c)$, либо при некотором $t_0 \in [b, \infty)$ $z(t_0) \in g$ и $z([b, t_0]) \subset$ $\subset K_1$. В первом случае из последовательности функции $z_i(t) =$ $= z(t + s_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, $t \in [0, t_i - s_i]$, выберем подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $z^* \in Z$ (напомним, что $\operatorname{diam}_Z K_1 < \infty$ и поэтому условие $Z \in A_{ce}(V)$ обеспечивает существование такой подпоследовательности). Для функции z^* имеем $z^*(0) \in [O_\delta y_0]$, $z^*(\sup \pi(z)) = z(c)$, а это противоречит условиям $z(c) \in M^- \cap S$ и $M^- \cap M^+ \cap S = \varnothing$. Во втором случае надо взять наименьшее из таких чисел t_0 и положить $s_0 =$ $= \sup\{t\colon t \in \pi(z), t < t_0, z(t) \in [O_\delta y_0]\}$. Теперь свойства функции

$z|_{[s_0,t_0]}$ входят в противоречие с выбором числа δ. Таким образом, во всех случаях сделанное допущение, что компакт K не является одноточечным и не совпадает с множеством значений какой-либо периодической функции, принадлежащей множеству Z^{-+}, приводит к противоречию. Теорема доказана.

6.14. Замечание. Воспользуемся обозначениями теоремы 6.13. По этой теореме множество A функций $z \in Z$, для которых $K = p(z)$ и $z(\inf \pi(z)) = z(\sup \pi(z))$, непусто. Пусть $d = \inf\{b\colon [0,b] \in \pi(A)\}$. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ зафиксируем функцию $z_n \in A$, длина области определения которой не больше $+2^{-n}$. Воспользовавшись условием $Z \in A_{ce}(V)$ и компактностью множества K, перейдем к подпоследовательности последовательности $\{z_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$, сходящейся к некоторой функции $z^* \in A$. Имеем $\pi(z^*) = [0, d]$ и кривая $z^*(t)$, $0 \leqslant t \leqslant d$, является замкнутой кривой без самопересечений.

§ 7. Теорема о существовании стационарной точки

7.1. Пусть V — открытое подмножество плоскости, $Z \in A_{ce}(V)$, $z \in Z^{-+}$, $\pi(z) = (-\infty, \infty)$, $a > 0$, для любого $t \in (-\infty,\infty)$ $z(t + a) = z(t)$ и если $0 \leqslant t_1 < t_2 < a$, то $z(t_1) \neq z(t_2)$.

По теореме Жордана [3] кривая $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant a$, разбивает плоскость на две связные области V_1 и V_2, причем замыкание одной из этих областей (пусть V_1) компактно. Обозначим множество всех таких лежащих в области V областей через $P(Z, V)$. Ясно, что каждый элемент множества $P(Z, V)$ имеет компактное замыкание, лежащее в области V.

7.2. Пусть теперь $\{V_n\colon n = 1, 2, \ldots\} \subset P(Z, V)$ и $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$ Множество $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} [V_n]$ — компакт, лежащий в области V. По следствию 6.5 получаем, что $\operatorname{diam}_Z K = \infty$, а из последнего замечания 6.6 теперь следует, что существует минимальный компакт $K_1 \subset K$ бесконечного диаметра.

Допустим, что множество K_1 неодноточечно. Тогда по теореме 6.13 и замечанию 6.14 найдется такая функция $z \in Z$, $\pi(z) = [0, a]$, что $p(z) = K_1$, $z(0) = z(a)$, а при $0 \leqslant t_1 < t_2 < a$ $z(t_1) \neq z(t_2)$. Кривая $l = \{z(t)\colon 0 \leqslant t \leqslant a\}$ ограничивает некоторую область $V^* \in P(Z, V)$.

Для любого $n = 1, 2, \ldots$ $l \subset [V_n]$ и при этом множество $[V_n]$ компактно. Покажем, что $V^* \subset [V_n]$. Допустим противное. Тогда множество $V^* \setminus [V_n]$ непусто. Так как множество $[V_n]$ компактно, то множество $\mathbb{R}^2 \setminus [V_n]$ некомпактно и поэтому множество $(\mathbb{R}^2 \setminus [V_n]) \setminus V^*$ непусто. В силу связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus [V_n]$ отсюда следует, что множество $\operatorname{Fr} V^* \setminus [V_n] = l \setminus [V_n]$ непусто, но это противоречит сказанному выше.

Теперь, так как V^* — открытое подмножество плоскости, то $V^* \subset \operatorname{Int}[V_n] = V_n$.

Таким образом, $V^* \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$.

7.3. Обсуждение, проведенное в 7.2, позволяет утверждать следующее. Пусть $V_1 \in P(Z, V)$. Тогда либо в множестве $[V_1]$ есть стационарная точка пространства Z (см. 6.6), либо найдется область $V^* \in P(Z, V)$, лежащая в области V_1, в замыкании которой нет стационарных точек и которая не содержит элементов множества $P(Z, V)$ в качестве собственных подмножеств. В следующей теореме покажем, что второй случай невозможен.

7.4. Теорема. *Пусть V — открытое подмножество плоскости, $Z \in A_{ce}(V)$, $V_0 \in P(Z, V)$. Тогда в множестве $[V_0]$ есть стационарная точка пространства Z.*

Доказательство. I. В соответствии с определением множества $P(Z, V)$ найдутся функция $z_0 \in Z^{-+}$, $\pi(z_0) = (-\infty, \infty)$, и число $a > 0$ такие, что для любого $t \in (-\infty, \infty)$ $z_0(t + a) = z_0(t)$, и если $0 \leqslant t_1 < t_2 < a$, то $z_0(t_1) \neq z_0(t_2)$ и замкнутая кривая $l = \{z_0(t) : 0 \leqslant t \leqslant a\}$ ограничивает область V_0.

В силу 7.3 достаточно рассмотреть случай, когда любое компактное подмножество множества $V_0 \cup l$, не содержащее целиком множество l, имеет конечный диаметр относительно пространства Z.

Проще представить себе возникающую ситуацию, если воспользоваться теоремой Римана о существовании гомеоморфизма (более того, конформного отображения) любой односвязной области плоскости и открытого круга и добавлениями к теореме о продолжении этого гомеоморфизма на замыкание области, которыми можно пользоваться в данном случае. Предполагаем эти факты известными из курса теории функций комплексного переменного (см., например, [4]).

Таким образом, считаем, что l — окружность единичного радиуса с центром в начале координат, а V_0 — ограничиваемый ею круг.

Доказательство состоит в рассмотрении двух случаев. В первом случае предположим, что существует такая функция $z_1 \in Z$, что $p(z_1) \cap l \neq \varnothing$ и $p(z_1) \cap V_0 \neq \varnothing$, во втором случае — что таких функций нет.

II. Рассмотрим первый случай. Очевидно, можно предположить дополнительно, что функция z_1 принимает значение, принадлежащее множеству l, только в одной из концевых точек отрезка $\pi(z_1)$. Предположим, что $\pi(z_1) = [a_1, b_1]$ и $z_1(a_1) \in l$ (случай $z_1(b_1) \in l$ рассматривается аналогично).

Продолжим функцию z_1 вправо до функции $z_2 \in Z^+$. Если при некотором $t \in \pi(z_2) \setminus \{a_1\}$ $z_2(t) \in l$, то, используя функции z_0 и $z_2|_{[a_1,t]}$, можем составить периодическую функцию, принадлежащую Z^{-+}, множество значений которой не содержит целиком множество l, а это противоречит сделанным в I допущениям. При любом $t \in \pi(z_2)$ точка $z_2(t)$ принадлежит компакту $V_0 \cup l$ и отсюда следует, что $\sup \pi(z_2) = \infty$.

По аналогичным причинам кривая $z_2(t)$ не имеет самопересечений.

Зафиксируем такое $\varepsilon > 0$, что $\|z_2(a_1) - z_2(b_1)\| > 2\varepsilon$. Множество $O_{2\varepsilon} z_2(a_1)$ высекает на окружности l дугу $l_{2\varepsilon}$ с концами α и β, содержащую точку $z_2(a_1)$. В силу сказанного $l_{2\varepsilon} \cap \cap z_2((a_1, \infty) = \varnothing$, а из того, что множество $\Omega^+(z_2)$ имеет бесконечный диаметр относительно пространства Z, следует, что $l_{2\varepsilon} \subset \Omega^+(z_2)$. Пусть l^α и l^β — части дуги $l_{2\varepsilon}$ с концами $z_2(a_1)$ и α, $z_2(a_1)$ и β соответственно.

Пусть $s_0^2 = \inf\{t\colon t \in \pi(z_2), \|z_2(a_1) - z_2(t)\| = 2\varepsilon\}$. Пусть S^α и S^β — дуги окружности радиуса 2ε с центром в точке $z_2(a_1)$, лежащие в круге V_0 и имеющие концы α и $z_2(s_0^2)$, β и $z_2(s_0^2)$ соответственно. Множество $O_\varepsilon z_2(a_1)$ высекает на окружности l дугу l_ε с концами α_1 (со стороны точки α) и β_1 (со стороны точки β). Пусть l_1^α и l_1^β — части дуги l_ε с концами α_1 и $z_2(a_1)$, β_1 и $z_2(a_1)$ соответственно.

Построим последовательности точек $t_n^1 < t_n^2 < s_n^1 < s_n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, множества $\pi(z_2)$.

Пусть выбрана точка $s_{n-1}^2 \in [S^\beta]$, $n = 1, 2, \ldots$, таким образом, что на части дуги S^β между точками $z_2(s_{n-1}^2)$ и β нет точек кривой $z_2(t)$, $a_1 \leqslant t \leqslant s_{n-1}^2$. Так как дуга l_1^β лежит в множестве $\Omega^+(z_2)$, то кривая $z_2(t)$, $t > s_{n-1}^2$, должна войти в пересечение A множества $O_\varepsilon z_2(a_1)$ с областью B, ограниченной дугой l^β, кривой $z_2(t)$, $a_1 \leqslant t \leqslant s_{n-1}^2$, и частью дуги l^β между точками $z_2(s_{n-1}^2)$ и β. Пусть $t_n^2 = \inf\{t\colon t > s_{n-1}^2, z_2(t) \in A\}$ и t_n^1 — значение параметра $t \in [s_{n-1}^2, t_n^2]$, соответствующее ближайшей к точке β точке пересечения кривой $z(t)$, $s_{n-1}^2 \leqslant t \leqslant t_n^2$, с другой $[S^\beta]$. Так как $l^\alpha \subset \Omega^+(z_2)$, то кривая $z_2(t)$, $t > t_n^2$, должна выйти из области B_1, ограниченной дугой l^β, кривой $z_2(t)$, $a_1 \leqslant t \leqslant t_n^1$, и частью дуги S^β между точками $z_2(t_n^1)$ и β. Пусть $s^{2n} = \inf\{t\colon t \geqslant t_n^2, z_2(t) \notin B_1\}$. Так как наша кривая не имеет самопересечений, то $z_2(s_n^2) \in S^\beta$ и на части дуги S^β между точками $z_2(s_n^2)$ и β нет точек кривой $z_2(t)$, $a_1 \leqslant t \leqslant s_n^2$. Обозначим через s_n^1 значение параметра $t \in [t_n^2, s_n^2]$, соответствующее ближайшей к точке β_1 точке пересечения кривой $z_2(t)$, $t_n^2 \leqslant t \leqslant s_n^2$, с окружностью радиуса ε с центром в точке $z_2(a_1)$.

Ясно, что при таком построении точки $z_2(s_0^2)$, $z_2(t_1^1)$, $z_2(s_1^2)$, $z_2(t_2^1)$, $z_2(s_2^2), \ldots$ монотонно движутся по дуге S^β в направлении от точки $z(s_0^2)$ к точке β, а точки $z_2(t_1^2)$, $z_2(s_1^1)$, $z_2(t_2^2)$, $z_2(s_2^1)$, $z_2(t_3^2), \ldots$ — соответственно по окружности радиуса ε с центром в точке $z_2(a_1)$.

Пусть $\gamma_1 = \lim\limits_{n\to\infty} z_2(t_n^2) = \lim\limits_{n\to\infty} z_2(s_n^2)$ и $\gamma_2 = \lim\limits_{n\to\infty} z_2(t_n^2) = \lim\limits_{n\to\infty} z_2(s_n^2)$. Так как диаметр множества $[O_{2\varepsilon} z_1(a_1)] \cap [V_0]$ конечен, то для некоторого $M > 0$ при любом $n = 1, 2, \ldots$ $|s_n^1 - s_n^2| \leqslant M$ и $|t_n^1 - t_n^2| \leqslant M$.

Из последовательностей функций $z_2(t_n^1 + t)$, $0 \leqslant t \leqslant |t_n^2 - t_n^1|$, и $z_2(s_n^1 + t)$, $0 \leqslant t \leqslant s_n^2 - s_n^1$, $n = 1, 2, \ldots$, выберем подпоследовательности, сходящиеся соответственно к функциям $y_1, y_2 \in Z$.

Но начало кривой $y_1(t)$ (точка γ_1) совпадает с концом кривой $y_2(t)$, а конец кривой $y_1(t)$ (точка γ_2) — с началом кривой $y_2(t)$. Поэтому, используя эти функции, можно составить периодическую функцию, принадлежащую Z^{-+}, множество значений которой целиком лежит в множестве $[O_{2\varepsilon} z_2(a_1)] \cap [V_0]$, а это противоречит конечности диаметра этого множества относительно пространства Z. Таким образом, первый случай невозможен.

III. Рассмотрим второй случай: для любой функции $z \in Z$, если $p(z) \subset V_0 \cup l$ и $p(z) \cap l \neq \varnothing$, то $p(z) \subset l$.

Кривая l может проходиться функциями, принадлежащими пространству Z, только в одном направлении, так как в противном случае имеем возможность построить периодическую функцию, принадлежащую Z^{-+}, множество значений которой (лежит в l и) ее содержит целиком множество l, что противоречит сделанным в I допущениям. Положим для определенности, что это направление — против часовой стрелки.

IV. Пусть J_1, J_2 и J_3 — последовательные (при движении против часовой стрелки) координатные лучи, $\{z_n\colon n = 1, 2, \ldots\} \subset \subset Z^{-+}$ и точки $z_n(0)$, $n = 1, 2, \ldots$, лежат на луче J_2, $\|z_n(0)\| < 1$ и $\|z_n(0)\| \to 1$. Пусть P — открытая полуплоскость с границей $J_1 \cup J_3$, содержащая луч J_2, $\varepsilon \in (0, 1), Q_\varepsilon = P \cap (V_0 \setminus [V_\varepsilon])$, где V_ε — открытый круг с центром в начале координат и радиусом $1 - \varepsilon$. Покажем, что начиная с некоторого n можно так выбрать отрезки $[s_n, t_n] \subset \pi(z_n)$, что $0 \in [s_n, t_n]$, $z_n(s_n) \in J_1$, $z_n(t_n) \in J_3$ и $z_n([s_n, t_n]) \subset [Q_\varepsilon]$.

Заметим прежде всего, что начиная с некоторого n $z_n(0) \in \in Q_\varepsilon$, и поэтому в силу конечности диаметра множества Q_ε относительно пространства Z можно так отметить точки $s_n < < 0 < t_n$, что $z_n([s_n, t_n]) \in [Q_\varepsilon]$ и $(z_n(s_n), z_n(s_n)) \subset \operatorname{Fr} Q_\varepsilon$.

Допустим, что наше предположение неверно. Тогда найдется сколь угодно большой номер n, для которого по крайней мере одна из точек $z_n(s_n)$, $z_n(t_n)$ принадлежит множеству $\operatorname{Fr} Q_\varepsilon \cap \cap \operatorname{Fr} V_\varepsilon$. Диаметр множества $[Q_\varepsilon]$ относительно пространства Z конечен, и поэтому можно перейти к подпоследовательности последовательности $\{z_n|_{[s_n, t_n]}\colon n = 1, 2, \ldots\}$, сходящейся к некоторой функции $z_0 \in Z$, для которой по крайней мере одна из точек $z_0(\inf \pi(z_0))$ или $z_0(\sup \pi(z_0))$ принадлежит множеству $\operatorname{Fr} Q_\varepsilon \cap \cap \operatorname{Fr} V_\varepsilon$. Но так как при этом оказывается $z_0(0) \in l$, то это входит в противоречие с первоначальными предположениями (см. III).

Остается доказать, что $z_n(s_n) \in J_1$ и $z_n(t_n) \in J_3$, начиная с некоторого n. Но если это не так, то мы можем перейти к подпоследовательности последовательности $\{z_n|_{[s_n, t_n]}\colon n = = 1, 2, \ldots\}$, сходящейся к некоторой функции $z_0 \in Z$, для которой либо $z_0(\inf \pi(z_0)) \in J_3$, либо $z_0(\sup \pi(z_0)) \in J_1$. При этом $z_0(0) \in$ $\in l$, поэтому (см. III) $p(z_0) \subset l$, а это противоречит замечанию о направлении движения по окружности l.

V. Сохраним обозначения п. IV. Из IV следует, что найдется такое число $\delta > 0$, что если $z \in Z^{-+}$, $z(0) \in J_1$, $1 - \delta < \|z(0)\| <$ < 1, то кривая $z(t)$, $t \geqslant 0$, сделав полтора оборота в полосе $V_0 \setminus [V_\varepsilon]$ против часовой стрелки, при некотором $t_4 > 0$ выйдет (первый раз после полутора оборотов) на луч J_3. Зафиксируем любую такую функцию z и соответствующее значение t_4. На первом обороте кривая может несколько раз пересечь луч J_3. Пусть t_2 — то значение аргумента, для которого точка $z(t_2)$ является ближайшей к точке $z(t_4)$ из всех точек пересечения нашей кривой с лучом J_3 на первом обороте. В начале движения (т. е. при значениях аргумента, близких к $t = 0$) и в конце первого оборота кривая $z(t)$ может по несколько раз пересечь луч J_1. Пусть t_1 и t_3 — такие значения аргумента, соответствующие этим пересечениям, что на отрезке, соединяющем точки $z(t_1)$ и $z(t_3)$, нет других точек пересечения луча J_1 с кривой $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_4$.

Составим два контура. Первый S_1: из кривой $z(t)$, $t_1 \leqslant$ $\leqslant t \leqslant t_3$, и отрезка, соединяющего точки $z(t_1)$ и $z(t_3)$; второй, s_2: из кривой $z(t)$, $t_2 \leqslant t \leqslant t_4$, и отрезка, соединяющего точки $z(t_2)$ и $z(t_4)$. Кривая $z(t)$ не может иметь самопересечений (как и раньше, в противном случае получаем возможность составить периодическую функцию, принадлежащую множеству Z^{-+}, множество значений которой лежит в области V_0). Отсюда и из выбора δ следует, что кривая $z(t)$, $t \geqslant t_4$, не пересекает контур S_1, а кривая $z(t)$, $t \leqslant t_1$, — контур S_2. Но из этого следует, что либо $l \not\subset \Omega^+(z)$, либо $l \not\subset \Omega^-(z)$, и, следовательно, в $V_0 \cup l$ есть множества бесконечного относительно пространства Z диаметра, которые не содержат целиком множество l, а это противоречит допущениям, сделанным в I. Полученное противоречие завершает разбор второго случая. Теорема доказана.

§ 8. Теорема Пуанкаре–Бендиксона

8.1. Лемма. *Пусть V — открытое подмножество плоскости, $Z \in A_{cek}(V)$ и K — лежащий в области V замкнутый круг с центром в точке x, $\operatorname{diam}_Z K < \infty$. Тогда найдутся* *непересекающиеся интервалы s_1 и s_2 окружности S, ограничивающей круг K, такие, что если $z \in Z$, $p(z) \subset K$, $0 \in \pi(z) = [a, b]$, $z(0) = x$ и $z(a), z(b) \in S$, то $z(a) \in s_1$, $z(b) \in s_2$.*

Доказательство. I. Обозначим M множество функций $z \in Z$, для которых $0 \in \pi(z)$, $z(0) = x$, $z(\inf \pi(z)), z(\sup \pi(z)) \in S$, $p(z) \subset K$. Из условия $Z \in A_{ce}(V)$, конечности диаметра компакта K относительно пространства Z и лемм 2.10 и 2.9 следует, что множество M непусто. Для $z \in M$ обозначим $\alpha(z) = z(\inf \pi(z))$, $\beta(z) = z(\sup \pi(z))$. Зафиксируем любую функцию $z_0 \in M$. Пусть $\pi(z_0) = [a_0, b_0]$. Имеем $\alpha(M) \cap \beta(M) = \varnothing$, так как в противном случае получили бы возможность составить периодическую функцию $z \in Z^{-+}$, для которой $p(z) \subset K$, что противоречит конечности диаметра множества K относительно пространства Z. Обозначим γ_1 (соответственно γ_2) множество всех отрезков окружности S с концами из $\alpha(M)$ (соответственно $\beta(M)$), содержащих точку $\alpha(z_0)$ (соответственно $\beta(z_0)$) и не содержащих точку $b(z_0)$ (соответственно $a(z_0)$), и положим для $i = 1, 2$ $p_i = \cup \gamma_i$.

Из условия $Z \in A_{ce}(V)$ и конечности диаметра множества K относительно пространства Z легко следует замкнутость множеств p_1 и p_2. Из определения этих множеств следует, что они являются либо интервалами, либо полуинтервалами, либо отрезками окружности S. В силу замкнутости множеств p_1 и p_2 первые два случая невозможны. Таким образом, при $i = 1, 2$ $p_i \in \gamma_1$.

II. Покажем, что отрезки p_1 и p_2 не пересекаются. Допустим противное. Тогда множество $p_1 \cap \beta(M)$ непусто. Пусть x_1 — произвольная точка этого множества. Зафиксируем три функции z_1, z_2 и z_3, принадлежащие множеству Z, для которых $p(z_i) \subset K$, $i = 1, 2, 3$, и для первой $\pi(z_1) = [0, b]$, $z_1(b) = x_1$, для двух других $\pi(z_i) = [a_i, 0]$, $i = 2, 3$, и $z_i(a_i)$ — концы отрезка p_1, и, наконец, при $i = 1, 2, 3$ $z_i(0) = x$.

Если $z^* \in Z$, $\pi(z^*) = [0, c]$, $p(z^*) \subset K$ и $z^*(0) = x$, то $p(z^*) \cap (p(z_2) \cup p(z_3)) = \{x\}$, так как в противном случае мы могли бы составить периодическую функцию $z \in Z^{-+}$, для которой $p(z) \subset K$, что, как уже отмечалось, противоречит конечности диаметра множества K относительно пространства Z.

Пусть для $i = 2, 3$ l_i обозначает луч с началом в точке $z_i(a_i)$ и направляющим вектором $z_i(a_i) - x$, K_1 — круг с центром в точке x и радиусом большим, чем радиус круга K. Из теоремы Жордана следует, что дополнение к множеству $p(z_2) \cup p(z_3) \cup \cup l_2 \cup l_3$ в круге K_1 представляется в виде объединения двух компонент G_1 и G_2. В одной из этих компонент лежит множество $z_1((0, b])$, в другой — $z_0((0, b_0])$.

В силу замечаний, сделанных в двух предыдущих абзацах, при достаточно малом $c > 0$ множество $A_c = \{z(c)\colon z \in Z, \pi(z) = = [0, c], z(0) = x\}$ лежит в множестве $G_1 \cup G_2$ и пересекается с каждым из множеств G_1 и G_2. Поэтому множество A_c несвязно, а это противоречит условию $Z \in A_{cek}(V)$.

III. Для завершения доказательства осталось взять в качестве s_1 и s_2 произвольные непересекающиеся интервалы окружности S так, чтобы первый содержал отрезок p_1, второй — отрезок p_2. Лемма доказана.

8.2. Лемма. *Пусть V — открытое подмножество плоскости, $\langle Z, Z_\infty \rangle \in B(V)$, $Z_\infty \in A_{cek}(V)$ и K — лежащий в области V замкнутый круг с центром в точке x, $\operatorname{diam}_{Z_\infty} K < \infty$. Тогда найдутся такие непересекающиеся интервалы s_1 и s_2 окружности S, являющейся границей круга K, число $T \in \mathbb{R}$ и окрестность Ox точки x, что если $z \in Z$, $p(z) \subset K$, $p(z) \cap \cap Ox \neq \varnothing$, $\pi(z) = [a, b]$, $a \geqslant T$ и $z(a), z(b) \in S$, то $z(a) \in s_1, z(b) \in \in s_2$.*

Доказательство. Выберем интервалы s_1 и s_2 в соответствии с леммой 8.1 для пространства Z_∞. Допустим, что они не удовлетворяют поставленным условиям. Это означает, что при любом $n = 1, 2, \ldots$ найдется функция $z_n \in Z$, для которой $\pi(z_n) = = [a_n, b_n]$, $a_n > n$, $p(z_n) \subset K$, $p(z_n) \cap O_{1/n}x \neq \varnothing$, $z_n(a_n), z_n(b_n) \in \in S$, причем либо точка $z_n(a_n)$ не принадлежит интервалу s_1, либо точка $z_n(b_n)$ не принадлежит интервалу s_2. Из леммы 6.8 и конечности диаметра множества K относительно пространства Z_∞ следует, что числа $b_n - a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничены в совокупности. Из той же леммы 6.8 теперь следует существование функции $z \in Z_\infty$, для которой $p(z) \subset K$, $x \in p(z)$, и либо $z(\inf \pi(z)) \notin s_1$, либо $z(\sup \pi(z)) \notin s_2$, а это противоречит нашему выбору интервалов s_1 и s_2. Лемма доказана.

8.3. Предложение. *Пусть V — открытое подмножество плоскости, $\langle Z, Z_\infty\rangle \in B(V)$, $Z_\infty \in A_{cek}(V)$, $z \in Z^+$, $\pi(z) = [a, \infty)$, и, если $a \leqslant t_1 < t_2 < \infty$, то $z(t_1) \neq z(t_2)$. Пусть x — произвольная точка множества $\Omega^+(z) \cap V$, не являющаяся стационарной точкой пространства Z_∞. Тогда найдутся такая окрестность Ox точки x и такая функция $z_1 \in Z_\infty$, что $Ox \cap \Omega^+(z) = Ox \cap p(z_1)$.*

Доказательство. В силу одного из замечаний 6.6 найдется такое $\varepsilon > 0$, что замыкание K ε-окрестности точки x (лежит в области V и) имеет конечный относительно пространства Z_∞ диаметр. Найдем Ox, s_1 и s_2 в соответствии с леммой 8.2. При этом уменьшение окрестности Ox не сказывается на выполнении поставленных условий, и поэтому считаем, что множество Ox является δ-окрестностью точки x при некотором $\delta \in (0, \varepsilon)$.

Множество $z^{-1}(O_\varepsilon x)$ открыто в полуинтервале $\pi(z)$ и поэтому представляется в виде объединения счетного семейства своих компонент связности. Пусть γ — множество тех элементов этого семейства, которые лежат правее точек a, T и пересекаются с множеством $z^{-1}(Ox)$. В каждом элементе G семейства γ отметим точку $t(G)$, для которой $z(t(G)) \in Ox$. Множество $\{t(G)\colon G \in \gamma\}$ не имеет предельных точек (если бы такая точка t существовала, то точка $z(t)$ в силу непрерывности функции z принадлежала бы одновременно множествам $[Ox]$ и $V \setminus O_\varepsilon x$, что невозможно, так как эти множества не пересекаются), поэтому точки $t(G)$, $G \in \gamma$, можно занумеровать в порядке их возрастания: $\{t_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$. Соответствующим образом занумеруем элементы множества γ: $\gamma = \{(a_n, b_n)\colon n = 1, 2, \ldots\}$, где $t_n = t((a_n, b_n))$. Имеем $z(a_n) \in s_1$, $z(b_n) \in s_2$. Возьмем любой номер $n = 1, 2, \ldots$ Точки $z(a_n)$ и $z(a_{n+1})$ определяют порядок на интервале s_1. Считаем, что точка $z(a_{n+1})$ лежит левее точки $z(a_n)$. Покажем, что точка $z(a_{n+2})$ лежит левее точки $z(a_{n+1})$. Для этого соединим кривые $z(t)$, $a_n < t < b_n$, и $z(t)$, $a_{n+1} < t < b_{n+1}$, отрезком l, лежащим целиком в множестве Ox (пусть $z(t^*)$, $t^* \in (a_n, b_n)$, и $z(t^{**})$, $t^{**} \in (a_{n+1}, b_{n+1})$, — концы этого отрезка), так, чтобы замкнутый контур λ, образованный отрезком l и кривой $z(t)$, $t^* \leqslant t \leqslant t^{**}$, не имел самопересечений. Если теперь допустим, что точка $z(a_{n+2})$ лежит правее точки $z(a_{n+1})$, то кривая $z(t)$, $b_{n+1} \leqslant t \leqslant a_{n+2}$, обязана пересечь контур

λ, а так как кривая $z(t)$, $t \geqslant a$, не имеет самопересечений, то кривая $z(t)$, $b_{n+1} \leqslant t \leqslant a_{n+2}$, должна пересечь отрезок l и, следовательно, множество Ox, а это противоречит определению точки a_{n+2}. Полученное противоречие показывает, что точки $z(a_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, выстраиваются на интервале s_1 в монотонную последовательность. В силу того что кривая $z(t)$, $t \geqslant a$, не имеет самопересечений, отсюда следует, что и точки $z(b_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, соответствующим образом упорядочены на интервале s_2.

Из леммы 6.8 и из конечности диаметра множества K относительно пространства Z_∞ следует, что из последовательности функций $\{z(t + a_n)\colon 0 \leqslant t \leqslant b_n - a_n, n = 1, 2, \ldots\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{z(t + a_{n_i})\colon 0 \leqslant t \leqslant b_{n_i} - a_{n_i}, i = 1, 2, \ldots\}$, сходящуюся к некоторой функции $z_0 \in Z_\infty$. Пусть для $n = 1, 2, \ldots$ K_n — замыкание области, ограниченной контуром, состоящим из кривой $z(t)$, $a_n \leqslant t \leqslant b_n$, и той из дуг окружности S с концами $z(a_n)$ и $z(b_n)$, которая не содержит точек $z(a_m)$ и $z(b_m)$ при $m = n + 1, n + 2, \ldots$ Имеем $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$, причем кривая $z(t)$, $a_n < t < b_n$, проходит внутри K_{n+1}. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, z([a_n, b_n]) &= [\cup\{K_n\colon n = 1, 2, \ldots\}] \setminus (\cup\{K_n\colon n = 1, 2, \ldots\}) = \\ &= [\cup\{K_{n_i}\colon i = 1, 2, \ldots\}] \setminus (\cup\{K_{n_i}\colon i = 1, 2, \ldots\}) = \\ &= \overline{\lim_{i\to\infty}}\, z([a_{n_i}, b_{n_i}]) = \lim_{i\to\infty} z([a_{n_i}, b_{n_i}]) = p(z_0).\end{aligned}$$

В силу выбора точек a_n, b_n, $n = 1, 2, \ldots$, имеем $\Omega^+(z) \cap \cap Ox = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, z([a_n, b_n]) \cap Ox$, и поэтому $\Omega^+(z) \cap Ox = p(z_0) \cap Ox$. Предложение доказано.

8.4. Теорема. *Пусть в обозначениях предложения* 8.3 *множество* $\Omega^+(z)$ *компактно и лежит в области* V *и в нем нет стационарных точек пространства* Z_∞. *Тогда найдется такая периодическая функция* $z_1 \in Z_\infty^{-+}$, *что* $p(z_1) = \Omega^+(z)$, *и если* b — *(наименьший) период функции* z_1, *то при* $0 \leqslant t_1 < < t_2 < b$ $z_1(t_1) \neq z_2(t_2)$.

Доказательство. Обозначим через M множество всех таких функций $z^* \in Z_\infty$, что $p(z^*) \subset \Omega^+(z)$ и кривая $z^*(t), t \in \in \operatorname{Int}\pi(z^*)$, не имеет самопересечений. Пусть α — верхняя грань длин областей определения функций, принадлежащих множеству M. Из предложения 8.3 следует, что $\alpha > 0$.

Из предложения 8.3 очевидным образом следует, что каждая точка x пространства $\Omega^+(z)$ обладает окрестностью Ox в пространстве $\Omega^+(z)$, гомеоморфной интервалу, диаметр которой относительно пространства Z конечен. В силу компактности пространства $\Omega^+(z)$ из покрытия $\{Ox\colon x \in \Omega^+(z)\}$ этого пространства можно выбрать конечное подпокрытие $\{Ox_1, \ldots, Ox_k\}$. Очевидно, для каждой функции $z^* \in M$ и любого из множеств Ox, $x \in \Omega^+(z)$, либо $p(z^*) \subset Ox$, либо $Ox \subset p(z^*)$, либо множество $(z^*)^{-1}(Ox)$ является полуинтервалом или объединением двух полуинтервалов, открытых в отрезке $\pi(z^*)$, и поэтому число α не превосходит $2\sum\{\mathrm{diam}_Z\, Ox_i\colon i = 1, \ldots, k\} < \infty$.

Зафиксируем последовательность функций $\{z_n^*\colon n = 1, 2, \ldots\} \subset M$, длина областей определения элементов которой стремится к α, и пусть при любом $n = 1, 2, \ldots$ $\inf \pi(z_n^*) = 0$. В силу условия $Z_\infty \in A_{ce}(V)$, компактности множества $\Omega^+(z)$ и ограниченности длин областей определения элементов этой последовательности числом α можно дополнительно предположить, что последовательность $\{z_n^*\colon n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к некоторой функции $z_0 \in Z_\infty$. Для нее имеем $p(z_0) \subset \Omega^+(z)$ и длина области определения равна α, а так как при любом $n = 1, 2, \ldots$ $\inf \pi(z_n^*) = 0$, то $\pi(z_0) = [0, \alpha]$. Пусть $0 < t_1 < t_2 < \alpha$. Допустим, что $z_0(t_1) = z_0(t_2)$. При некотором $i = 1, \ldots, k$ $z_0(t_1) \in Ox_i$. Выберем точки $a_1 \in (0, t_1)$ и $b_1 \in (t_2, \alpha)$ так, чтобы было выполнено $z_0([a_1, t_1]) \subset Ox_i$, $z_0([t_2, b_1]) \subset Ox_i$. Множество Ox_i гомеоморфно интервалу. Воспользуемся этим для описания геометрических особенностей возникающей ситуации. Точки $z_0(a_1)$ и $z_0(b_1)$ лежат в интервале Ox_i по разные стороны от точки $z_0(t_1)$, так как в противном случае, воспользовавшись функцией $z_0(t)$ и ее сдвигами по t, можем построить периодическую функцию, принадлежащую Z_∞^{-+}, множество значений которой лежит в множестве Ox_i, а это противоречит конечности диаметра множества Ox_i относительно пространства Z_∞. По аналогичным соображениям найдутся точки a_2, b_2, $t_1 < b_2 < a_2 < t_2$, для которых $z_0([t_1, b_2]) = z_0([t_2, b_1])$ и $z_0([a_1, t_1]) = z_0([a_2, t_2])$. Но тогда в силу сходимости $z_n \to z_0$ при достаточно больших n значение $z_0(t_1)$ будет приниматься функцией z_n по крайней мере дважды — на отрезках $[a_1, b_2]$ и $[a_2, b_1]$, что противоречит условию $z_n \in M$.

Тем самым доказали, что $z_0 \in M$. Теперь из того, что множества Ox, $x \in \Omega^+(z)$, гомеоморфны интервалам, и из предложения 8.3 следует, что $z_0(0) = z_0(\alpha)$ (иначе продолжим функцию z_0 за 0 или α; случай $z_0(0) \in z_0((0, \alpha))$ или $z_0(\alpha) \in z_0((0, \alpha))$ невозможен из-за гомеоморфности множеств Ox, $x \in \Omega^+(z)$, интервалам) и что множество $p(z_0)$ открыто (и замкнуто) в пространстве $\Omega^+(z)$.

Вспомним теперь, что мы определили в 6.9 множество $\Omega^+(z)$ как пересечение связных множеств: пусть $A_n = [z([a+n, \infty))]$, $A_0 = \Omega^+(z) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. В силу теорем IV.2.2 и IV.1.8 имеем сходимость в топологии Виеториса $A_n \to A_0$. Из теоремы IV.8.8 теперь следует, что множество $\Omega^+(z)$ связно и поэтому $p(z_0) = \Omega^+(z)$. Осталось продолжить функцию z_0 по периодичности до функции z_1. Теорема доказана.

8.5. Следствие. *Пусть V — открытое подмножество плоскости, $Z \in A_{cek}(V)$, $z \in Z^+$, $\pi(z) = [a, \infty)$, и если $a \leqslant t_1 < t_2 < \infty$, то $z(t_1) \neq z(t_2)$. Пусть множество $\Omega^+(z) \subseteq V$ компактно и в нем нет стационарных точек пространства Z. Тогда найдется такая периодическая функция $z_1 \in Z^{-+}$, что $p(z_1) = \Omega^+(z)$, и если b — (наименьший) период функции z_1, то при $0 \leqslant t_1 < t_2 < b$ $z_1(t_1) \neq z_1(t_2)$.*

Доказательство. Применяем теорему 8.4, положив $Z_\infty = Z$.

8.6. Теорема. *Пусть в обозначениях теоремы 8.4 функция $z_1(t)$ с точностью до сдвигов по t определена единственным образом, $\{a_n : n = 1, 2, \ldots\} \subset [a, \infty)$, $a_n \to \infty$ и для $n = 1, 2, \ldots$, $t \in [0, \infty)$, $z_n^*(t) = z(t + a_n)$. Пусть $z(a_n) = z_n^*(0) \to z_1(0)$. Тогда для любого отрезка $I \subset [0, \infty)$ последовательность функций $\{z_n^*|_I : n = 1, 2, \ldots\}$ равномерно сходится к функции $z_1|_I$.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда из леммы 6.8 следует, что для некоторого отрезка $I \subset [0, \infty)$ найдется такая подпоследовательность $\{z_{n_k}^* : k = 1, 2, \ldots\}$, что последовательность $\{z^*_{n_k}|_I\colon k=1,2,\ldots\}$ сходится к некоторой функции $z^*\in Z_\infty, \pi(z^*)=I$, отличной от функции $z_1|_I$.

При этом, очевидно, можно увеличивать отрезок I с сохранением всех указанных выше ограничений. Поэтому считаем, что $\inf I = 0$. Пусть $t_0=\sup\{t\colon t\geqslant 0, z^*|_{[0,t]}=z_0^*|_{[0,t]}\}$ и $k_0= =\sup\{k\colon k=0,1,\ldots,kb\leqslant t_0\}$. Возьмем такое число $t_1\in I\cap \cap(k_0b,\infty)$, что кривая $z^*(t)$, $k_0b\leqslant t\leqslant t_1$, не имеет самопересечений. Пусть $0<t_2<\infty$, $z_1(t_2)=z^*(t_1)$ и $t_3=\inf\{t\colon t>t_2, z_1(t)\in \in z^*([k_0b,t_1])\}$. Из того, что каждая точка пространства $\Omega^+(z)$ имеет в этом пространстве окрестность конечного диаметра относительно пространства Z_∞, гомеоморфную интервалу, следует, что $z_0(t_3)=z^*(k_0b)$ и что $z^*([k_0b,t_1])\cup z_1([t_2,t_3])=\Omega^+(z)$. Рассмотрим теперь функцию $z^{**}\in Z_\infty$, для которой $\pi(z^{**})= =[k_0b, t_1-t_2+t_3]$ и

$$z^{**}(t)=\begin{cases} z^*(t) & \text{при } t\in[k_0b,t_1];\\ z_0(t-t_1+t_2) & \text{при } t\in[t_1,t_1-t_2+t_3],\end{cases}$$

и продолжим эту функцию z^{**} по периодичности. При этом, очевидно, функция z^{**} не совпадает с функцией z_1, хотя $z^{**}(k_0b)= =z_1(k_0b)$. Это противоречит предположенной единственности функции z_1. Теорема доказана.

8.7. Замечание. Следствие 8.5, когда в качестве пространства Z фигурирует пространство решений обыкновенного дифференциального уравнения с непрерывной правой частью (чаще с дополнительным условием $Z\in A_u(V)$) и есть теорема Пуанкаре–Бендиксона. Теорема 8.4 является, таким образом, ее обобщением на случай, когда уравнение близко к автономному. Она применима, например, к уравнению вида $y'=f(y)(1+ +te^{-t\|y\|})$, где функция $f(y)$ непрерывна на плоскости и принимает значения из $\mathbb{R}^2$. Пространство Z решений этого уравнения при $t\to\infty$ сходится к пространству Z_∞ решений уравнения $y'= =f(y)$ (см. рассмотрение аналогичных ситуаций в 4.18).

Покажем, наконец, что если пространство Z_∞ есть пространство решений уравнения $y'=f(y)$ с непрерывной функцией f, то условие единственности функции z_1, фигурирующее в теореме 8.6, выполнено. Допустим противное. Тогда существуют по крайней мере две различные функции $z_1,z_2\in Z^+_\infty$, для которых $\pi(z_1) = \pi(z_2) = [0, \infty)$, $z_1(0) = z_2(0)$, $p(z_1) = p(z_2) = \Omega^+(z)$. Пусть M есть множество тех чисел $t \in [0, \infty)$, для которых определено такое непрерывное отображение $g_t\colon [0, t] \to [0, \infty)$, что $z_1(s) = z_2(g_t(s))$ для любого значения аргумента $s \in [0, t]$. Множеству M принадлежит, например, точка 0, и поэтому оно непусто. Из того, что каждая точка пространства обладает окрестностью, гомеоморфной интервалу, следует, что множество M открыто. Из непрерывности функций z_1 и z_2 следует, что множество замкнуто и что функции g_{t_1} и g_{t_2} совпадают на пересечении областей определения. Таким образом, $M = [0, \infty)$ и определена функция $g\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, такая, что $z_1(s) = z_2(g(s))$ для любого значения аргумента $s \in [0, \infty)$. Так как $z_1'(s) = f(z_1(s))$ и $z_2'(g(s)) = f(z_2(g(s))) = f(z_1(s))$, то $g'(s) \equiv 1$. Теперь из того, что $g(0) = 0$, следует, что для любого значения аргумента $s \in [0, \infty)$ $g(s) = s$ и, следовательно, $z_1 = z_2$, что противоречит первоначальному предположению относительно этих функций. Поставленная цель достигнута.

§ 9. Некоторые геометрические свойства пространств решений

В этом параграфе отметим еще некоторые геометрические свойства пространств решений, которые можно перенести на пространства введенных классов.

9.1. Теорема. *Пусть $V_0 \subset V$ — открытые подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, $Z \in A_{ce}(V)$, множество $(\mathrm{Fr}\, V_0) \cap V$ представимо в виде объединения двух непересекающихся множеств H_1 и H_2, где множество H_1 компактно, множество $H_1 \cup H_2$ некомпактно и для любой точки y множества H_2 найдется такая функция $z \in Z$, что $\pi(z) = [\varepsilon, 0]$, где $\varepsilon < 0$, $z(0) = y$ и $p(z) \subset V_0 \cup H_1 \cup H_2$. Тогда найдется такая функция $z_0 \in Z^- \cup Z^+$, что $p(z_0) \cap (H_1 \cup H_2) \neq \varnothing$ и $p(z_0) \subset V_0 \cup H_1 \cup H_2$.*

Доказательство. Пусть $y \in H_2$. Рассмотрим следующее условие: найдется такая функция $z \in Z$, что $p(z_0) \subset V_0 \cup H_1 \cup H_2$, $z(\inf \pi(z)) \in H_1$ и $z(\sup \pi(z)) = y$. Допустим, что оно не выполнено. Обозначим через M множество тех функций $z \in Z$, для которых $\sup \pi(z) = 0$, $z(0) = y$ и $p(z) \subset V_0 \cup H_1 \cup H_2$. Из сделанного допущения следует, что на самом деле для любой функции $z \in M$ последнее условие выполняется в усиленном виде: $p(z) \subset V_0 \cup H_2$, и поэтому из условий теоремы следует, что множество $A = \{\inf \pi(z)\colon z \in M\}$ открыто и, следовательно, имеет вид полуинтервала $(a, 0]$, где $a < 0$, причем возможно $a = -\infty$. Зафиксируем последовательность точек $\{a_n\colon n = 1, 2, \ldots\} \subset A$, $a_n \to a$, и последовательность функций $\{z_n\colon n = 1, 2, \ldots\} \subset Z^{-+}$, $z_n|_{[a_n, 0]} \in M$. Применим теорему 3.12 к последовательности пространств $\{Z_n = Z\colon n = 1, 2, \ldots\}$, последовательности функций $\{z_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ и последовательности точек $\{t_n = 0\colon n = 1, 2, \ldots \ldots\}$. Пусть z^* — функция, существующая по теореме 3.12 ($z^*(0) = y$) и отрезок $[c, 0]$ лежит в множестве $\pi(z^*)$. Если $c > > a$, то из теоремы 3.12 следует, что $z^*([c, 0]) \subset V_0 \cup H_1 \cup H_2$. Если при этом $a \in \pi(z^*)$, то, переходя к пределу при $c \to a$, получаем $z^*([a, 0]) \subset V_0 \cup H_1 \cup H_2$ и, таким образом, $a \in (a, 0]$. Полученное противоречие показывает, что $A \supset \pi(z^*) \cap (-\infty, 0]$ и, следовательно, включение $z^*([c, 0]) \subset V_0 \cup H_1 \cup H_2$ имеет место для любого числа c из множества $B = \pi(z^*) \cap (-\infty, 0]$. Поэтому для функции $z_0 = z^*|_B \in Z^-$ имеем $p(z_0) \subset V_0 \cup H_1 \cup H_2$ и можем взять построенную функцию z_0 в качестве искомой.

Остается рассмотреть случай, когда для любой точки y множества H_2 найдется такая функция $z \in Z$, что $z(\inf \pi(z)) \in \in H_1$ и $z(\sup \pi(z)) = y$. Так как множество $H_1 \cup H_2$ некомпактно и замкнуто в области V, то можно построить последовательность точек этого множества, не имеющую предельных точек в области V, а так как множество H_1 компактно, то в нем может лежать не более конечного числа элементов такой последовательности. Возможность отбросить такие точки из последовательности позволяет теперь утверждать, что существует такая последовательность $\{y_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ точек множества H_2, которая не имеет в области V предельных точек. В рассматриваемом случае для каждого $n = 1, 2, \ldots$ можно так выбрать функцию $z_n \in Z^{-+}$, что $0 \in \pi(z_n)$, $z_n(0) \in H_1$, и при некотором $t_n \in \pi(z_n) \cap \cap (0, \infty)$ $z_n(t_n) = y_n$. В силу компактности множества H_1 мы можем дополнительно предположить, что последовательность точек $\{z_n(0)\colon n = 1, 2, \ldots\}$ компакта H_1 сходится к некоторой точке $x \in \in H_1$. Воспользовавшись теоремой 3.12, аналогично тому как это сделано в первой части доказательства, получаем существование функции $z^* \in Z^{-+}$, для которой $z^*(0) = x$, и подпоследовательности $\{z_{n_k}: k = 1, 2, \ldots\}$, сходящейся в смысле теоремы 3.12 к функции z^*. Для любого отрезка $[0, c]$, лежащего в области определения функции z^*, начиная с некоторого k, $\pi(z_{n_k}) \supset [0, c]$. Покажем, что, начиная с некоторого k, $t_{n_k} \notin [0, c]$. Если допустим противное, то множество $\varkappa = \{k: k = 1, 2, \ldots, t_{n_k} \in [0, c]\}$ окажется бесконечным и поэтому последовательность $\{z_{n_k}(t_{n_k}) = y_{n_k}: k \in \varkappa\}$ имеет в силу теоремы 1.14 предельную точку, а это противоречит первоначальным предположениям относительно последовательности $\{y_n: n = 1, 2, \ldots\}$. Из выбора подпоследовательности $\{z_{n_k}: k = 1, 2, \ldots\}$ (в соответствии с теоремой 3.12) теперь получаем, что $z^*([0, c]) \subset V_0 \cup H_1 \cup H_2$, а ввиду произвольности отрезка $[0, c] \subset \pi(z^*)$ это означает, что функция $z_0 = z^*|_{[0,\infty) \cap \pi(z^*)} \in Z^+$ удовлетворяет поставленным условиям. Теорема доказана.

9.2. Теорема. *Пусть выполнены все предположения теоремы* 9.1, $Z \in A_k(V)$, *множество* V_0 *связно, множество* H_1 *непусто, а для любой точки* y *множества* H_2 *найдется такое число* $\varepsilon < 0$, *что для любой функции* $z \in Z$, *если* $0 \in \pi(z) \subset [\varepsilon, 0]$ *и* $z(0) = y$, *то* $p(z) \subset V_0 \cup H_1 \cup H_2$. *Тогда найдется такая функция* $z_0 \in Z^- \cup Z^+$, *что* $p(z_0) \cap H_1 \neq \varnothing$ *и* $p(z_0) \subset V_0 \cup H_1 \cup H_2$.

Доказательство. Обозначим M_1 множество $\cup\{p(z): z \in Z^-, p(z) \subset V_0 \cup H_1 \cup H_2\}$ и M_2 — множество $\cup\{p(z): z \in Z, z(\inf \pi(z)) \in H_1, p(z) \subset V_0 \cup H_1 \cup H_2\}$.

I. Рассмотрим случай, когда множество M_2 некомпактно. Можно выбрать функции $z_n \in Z^{-+}$, $0 \in \pi(z_n)$, и точки $t_n \in [0, \infty) \cap \pi(z_n)$ для $n = 1, 2, \ldots$, так, чтобы последовательность $\{z_n(t_n): n = 1, 2, \ldots\}$ не имела предельных точек в множестве M_2, а точки $z_n(0), n = 1, 2, \ldots$, принадлежали множеству H_1. В силу компактности множества H_1 предположим дополнительно, что последовательность точек $\{z_n(0): n = 1, 2, \ldots\}$ компакта H_1 сходится к некоторой точке y. Применим теорему 3.12 к последовательности пространств $\{Z_n = Z: n = 1, 2, \ldots\}$, последовательности функций $\{z_n: n = 1, 2, \ldots\}$ и последовательности точек $\{t_n = 0: n = 1, 2, \ldots\}$. Пусть z^* — функция, существующая по теореме 3.12 (имеем $z^*(0) = y \in H_1$), и отрезок $[0, c]$ лежит в множестве $\pi(z^*)$. Для последовательности $\{z_{n_k}\colon k = 1, 2, \ldots\}$, существующей в соответствии с теоремой 3.12, имеем: начиная с некоторого k, точка t_{n_k} не принадлежит отрезку $[0, c]$, так как в противном случае можно перейти к подпоследовательности, для которой (сохраняя старые обозначения) при любом k $t_{n_k} \in \in [0, c]$ и последовательность $\{t_{n_k}\colon k = 1, 2, \ldots\}$ сходится к некоторой точке $t \in [0, c]$. Но тогда в силу теоремы 1.14 последовательность $\{z_{n_k}(t_{n_k})\colon k = 1, 2, \ldots\}$ сходится, а это противоречит первоначальному выбору. Вспоминая содержание теоремы 3.12, заключаем: $z^*([0, c]) \subset V_0 \cup H_1 \cup H_2$. Но отсюда следует, что если $A = [0, \infty) \cap \pi(z^*)$, то функция $z_0 = z^*|_A \in Z^-$ удовлетворяет поставленным условиям.

II. Если множество M_2 компактно и его диаметр относительно пространства Z бесконечен, то доказываемое утверждение легко следует из леммы 6.3.

III. Рассмотрим последнюю возможность: множество M_2 компактно и его диаметр относительно пространства Z конечен.

Из теоремы 3.12 легко следует замкнутость множества M_1.

Возьмем любую точку $y \in V_0 \cup H_1 \cup H_2$ и рассмотрим функцию $z \in Z^-$, для которой $z(\sup \pi(z)) = y$. Если множество $p(z) \cap \cap H_1$ пусто, то $y \in M_1$; если это множество непусто, то $y \in M_2$. Таким образом, $V_0 \cup H_1 \cup H_2 = M_1 \cup M_2$. Множество $M_2 \neq \varnothing$, так как содержит непустое множество H_1. Будучи компактным, множество M_2 не совпадает с множеством $V_0 \cup H_1 \cup H_2$, которое мы предположили некомпактным. Множество V_0 связно, поэтому связно его замыкание $V_0 \cup H_1 \cup H_2$. Из отмеченных фактов следует, что множество $M = M_1 \cap M_2$ непусто. Будучи пересечением компактного и замкнутого множеств, M компактно. Его диаметр относительно пространства Z не больше диаметра компакта M_2 и поэтому конечен. Пусть диаметр компакта M относительно пространства Z равен $a < \infty$. Из компактности множества $Z_{[0,a] \times M}$ следует существование функции $z \in Z$, для которой $\pi(z) = [0, a]$ и $p(z) \subset M$.

Из принадлежности $z(0) \in M_1$ следует существование функции $z_1 \in Z^-$, для которой $\pi(z_1) = (b, 0]$, $z_1(0) = z(0)$ и $p(z_1) \subset \subset V_0 \cup H_1 \cup H_2$. Если $z(0) \in H_1$, то функция $z_0 = z_1$ удовлетворяет поставленным условиям. В противном случае зафиксируем функцию $z_2 \in Z$, для которой $\pi(z_2) = [c, 0]$, $c < 0$, и $z_2(0) = z(0)$, $z_2(c) \in H_1$.

Из принадлежности $Z \in A_{cek}(V)$ следует существование такого числа $\varepsilon > 0$, что при $|t| < \varepsilon$ множество $S_t = \{z^*(t) \colon z^* \in \in Z, \pi(z^*) \ni 0, t, z^*(0) = z(0)\}$ связно. В силу условия $z(0) \notin H_1$ при некотором $t \in (\max\{b, c, -\varepsilon\}, 0)$ в множестве S_t есть точки, принадлежащие множеству M_1, например, точка $z_1(t)$, и точки, принадлежащие множеству M_2, — $z_2(t)$. В силу связности множества S_t отсюда следует существование точки y, принадлежащей множеству $S_t \cap M_1 \cap M_2$, и, следовательно, существование функции $z_3 \in Z$, для которой выполнены условия $\pi(z_3) = [t, 0]$, $z_3(t) = y$, $z_3(0) = z(0)$. Рассмотрим функцию $z_4 \in Z$, для которой $\pi(z_4) = [t, a]$ и

$$z_4(t') = \begin{cases} z(t') & \text{при } t' \in [0, a]; \\ z_3(t') & \text{при } t' \in [t, 0]. \end{cases}$$

Функция z_4 определена на отрезке $[t, a]$ и $p(z_4) \subset M$. Получаем, что длина области определения функции z_4 больше числа a, а это противоречит определению числа $a = \operatorname{diam}_Z M$. Этим завершается разбор последнего случая и вместе с ним доказательство теоремы.

§ 10. Заключительные замечания

10.1. Глава, изложение которой мы заканчиваем, была посвящена аксиоматическому подходу к ряду разделов теории обыкновенных дифференциальных уравнений, разработанному В. В. Филипповым. Все наши рассуждения проводились на языке топологии пространства $C_s(U)$ и тех дополнительных структур, которые введены в 2.5. Этот текст является, в сущности, первой достаточно полной публикацией этого подхода [1]. Так как мы начинаем рассуждения с другого уровня, чем это делается обычно в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, где накладываются ограничения на правую часть уравнения, то появляются утверждения, специфические для нашей теории. Часть утверждений теории обыкновенных дифференциальных уравне-

[1] См. [21–25] и процитированную там литературу по поводу дальнейшего развития теории.

ний переносится в рамки нашей аксиоматики без существенных изменений в доказательстве. Наконец, имеются результаты, доказательство которых оказывается существенно более сложным, или по крайней мере заметно отличается от доказательства соответствующих утверждений, например, для уравнений с непрерывной правой частью. Это относится, в частности, к содержанию § 8 и 9. Усложнение доказательства искупается тем, что полученные результаты оказываются применимыми к более широким классам уравнений. При исследовании конкретного уравнения достаточно проверить, что пространство его решений удовлетворяет соответствующим условиям из приведенного в 2.5 списка, после чего доказанные утверждения оказываются приложимыми к этому уравнению, что, собственно, и составляет основное достоинство аксиоматического подхода.

10.2. Пусть в обозначениях § 1 и § 2 $F\colon U \to L$ — многозначное отображение. Функцию $z \in C_s(U)$ назовем *решением дифференциального включения* $y' \in F(t, y)$, если либо ее область определения состоит из одной точки, либо она обобщенно абсолютно непрерывна (см. [9]) и почти для всех $t \in \pi(z)$ вектор $z'(t)$ принадлежит множеству $F(t, z(t))$. Когда F — однозначная функция, мы говорим о решении уравнения $y' = F(t, y)$. Множество $D(F)$ всех решений этого включения (соответственно уравнения), как и раньше в аналогичных ситуациях, называем пространством решений.

Из определения сразу следует, что пространство решений $D(F)$ принадлежит множеству $R_p(U)$. Выполнение остальных условий, фигурирующих в 2.5, нужно доказывать дополнительно. Как уже отмечалось, проверка выполнения свойства 5 составляет содержание теоремы существования. Теорема 2.6 позволяет из обычных замечаний, сопровождающих теорему существования, выводить выполнение условия 4. В [20] указаны методы доказательства принадлежности пространства решений множеству $R_{ce}(U)$ в ситуациях, не охватываемых традиционными теоремами существования, и методы доказательства сходимости последовательности пространств решений. Результаты работы [20] строятся по образцу, рассмотренному в 4.3 и 4.4: имеется семейство γ подмножеств области U, на которых «все хорошо» и показывается, что множество особенностей $U \setminus (\cup\gamma)$ «несущественно», т. е. не влияет на выполнение соответствующего свойства. Это позволяет применять результаты такого рода несколько раз, доказывая несущественность множества особенностей поэтапно.

10.3. Можно рассматривать решения уравнения или включения в более узком классе функций, чем в 10.2, а именно в классе функций из $C_s(U)$, имеющих непрерывную производную всюду на области определения, за исключением, может быть, счетного замкнутого множества. Наш аппарат применим к пространствам решений в этом классе функций. Например, пусть функция f непрерывна в области U всюду, за исключением счетного замкнутого множества E. Положим для $n = 1, 2, \ldots$ и $x \in U$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho(x, E) \leqslant 1/n; \\ n(\rho(x, E) - (1/n)) & \text{при } 1/n \leqslant \rho(x, E) \leqslant 2/n; \\ 1 & \text{при } \rho(x, E) \geqslant 2/n \end{cases}$$

и $f_n(x) = f(x)\varphi_n(x)$. Функции f_n, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны, и поэтому пространства решений $D(f_n)$ принадлежат множеству $R_{ce}(U)$. Применяя к пространству $D(f)$ следствия 4.4 и 4.10 с $\Phi = C_s(U)$, получаем $D(f) \in R_c(U)$. Применяя теперь теоремы 4.3, 4.9 и 3.11 к последовательности пространств решений $\{D(f_n) \colon n = 1, 2, \ldots\}$ и пространству $D(f)$, получаем, что $D(f) \in R_{ce}(U)$. Везде в этом рассуждении пространства решений понимались в указанном смысле, но итог можно понимать как то, что пространство решений в смысле 10.2, исчерпываясь функциями указанного вида, что легко проверяется, обладает требуемыми свойствами.

10.4. Существование подобных аппроксимаций (см. также [20–24]) позволяет, используя результаты § 5, доказывать выполнение свойства Кнезера.

10.5. Пусть μ — обычная внешняя мера множеств на прямой. Для $M \subset U$ и $\Phi \subset C_s(U)$ назовем мерой множества M относительно пространства Φ число $\mu_\Phi(M) = \sup\{\mu\{t \colon t \in \pi(\varphi), (t, \varphi(t)) \in M\} \colon \varphi \in \Phi\}$.

10.6. Теорема. *Пусть* $F_1, F_2\colon U \to L$ *— многозначные отображения и* $\mu_{D(F_2)}(\{x\colon x \in U, F_1(x) \not\supset F_2(x)\}) = 0$. *Тогда* $D(F_2) \subset D(F_1)$.

Доказать самим.

10.7. Иногда возникает желание исследовать свойства пространства решений уравнения или включения, изменив правую часть таким образом, чтобы получалось уравнение или включение, методы исследования которого имеются. К этому прибегают, например, когда правая часть имеет разрывы и т. д. (см. [9]). Теорема 10.6 снимает для многих случаев вопрос о правомерности такого подхода. Выделим ее частный случай.

10.8. Следствие. *Пусть в предположениях теоремы* 10.6 *для любой точки* x *области* U $F_1(x) \subset F_2(x)$. *Тогда* $D(F_1) = D(F_2)$.

10.9. Приведем пример ситуации, когда пространство $Z \in A_{ce}(V)$ состоит из непрерывно дифференцируемых функций, но не является пространством решений уравнения. Пусть для $t, y \in \mathbb{R}$ $f(t,y) = 2\sqrt{|y|}$. Полагаем $Z = D(f) \setminus \{z\colon z \in D(f), \mu(\{t\colon t \in \pi(z), z(t) = 0\}) > 0\}$. Мы «подправили» пространство $D(f)$ на прямой $y = 0$.

Список литературы

1. Александров П. С. Комбинаторная топология. М.—Л.: ОГИЗ, 1947.
2. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
3. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
4. Богатый С. А., Федорчук В. В. Теория ретрактов и бесконечномерные многообразия. Итоги науки и техники. ВИНИТИ. 1986. Т. 24. С. 195–170.
5. Заричный М. М, Федорчук В. В. Ковариантные функторы в категориях топологических пространств. Итоги науки и техники. ВИНИТИ. 1990. Т. 28. С. 47–95.
6. Маркушевич И. А. Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968.
7. Мищенко А. С. О финально компактных пространствах//Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 6. С. 1224—1227.
8. Садовничий Ю. В. Поднятие функторов U_τ и U_R на котегорию ограниченных метрических пространств и категорию равномерных пространств. Матем. сб. 2000. Т. 191. № 11. С. 79–104.
9. Сакс С. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
10. Федорчук В. В. О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов //Успехи математических наук. 1984. Т. 39. № 5. С. 169–208.
11. Федорчук В. В. Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы //Успехи математических наук. 1986. Т. 41. № 6. С. 121–159.
12. Федорчук В. В. Многозначные ретракции и характиризации n-мягких отображений. Труды ММО. 1988. Т. 51. С. 169–207.
13. Федорчук В. В. Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов. Изв. АН СССР, сер. матем. 1990. Т. 54. № 2. С. 396–418.
14. Федорчук В. В. Вероятностные меры в топологии. УМН. 1991. Т. 46. № 1. С. 41–80.

15. Fedorchuk V. V. Functors of probability measures in topological categories. J. Vath. Sci. New York. 1998. V. 91. № 4. pp. 3157–3204.
16. Федорчук В. В. О топологической полноте пространств мер. Изв. РАН, сер. матем. 1999. Т. 91. № 1. С. 25–46.
17. Федорчук В. В, Чигогидзе А. Ч. Экстензоры и мягкие отображения. Издательство МГУ, 1987.
18. Федорчук В. В, Чигогидзе А. Ч. Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия. М.: Наука, 1992.
19. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
20. Филиппов В. В. Об обыкновенных дифференциальных уравнениях с особенностями в правой части //Математические заметки. 1985. Т. 38, № 6. С. 832—851.
21. Филиппов В. В. Топологическое строение пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений //Успехи математических наук. 1993. Т. 48, № 1. С. 103–154.
22. Филиппов В. В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений //Издательство МГУ, 1993.
23. Filippov V. V. Basic topological structures of the theory of ordinary differential equations, в книге: Topology in Nonlinear analysis// Banach center publications, 1996, V. 35, pp. 171–192.
24. Filippov V. V. Basic topological structures of the theory of ordinary differential equations // Kluwer, 1998.
25. Филиппов В. В. Что лучше в теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: метод Лерэ-Шаудера или сдвиг вдоль траекторий //Дифференциальные уравнения, 2001. Т. 37. № 8. С. 1049–1061.
26. Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов //Успехи математических наук. 1981. Т. 36, № 3. С. 3–62.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Классический университетский учебник

ISBN 5-9221-0618-X
9 785922 106184